



Research Paper

Performance Evaluation of LS-SVR Model in Predicting Scour Depth in Bridge Piers

Bijan Sanaati^{1*}

¹Assist. Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Islamic Azad University, Bukan Branch, Bukan, Iran

Article information

Received: May 08, 2023
Revised: June 19, 2023
Accepted: July 01, 2023

Keywords:

ANFIS
Bridge Piers
LS-SVR
Machine Learning
Prediction
Scour Depth

*Corresponding author:

bijan.sanaati@iau.ac.ir

**Abstract**

In this research work, two machine learning models including Least Squares Support Vector Machines (LS-SVR) and Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System (ANFIS) were used to predict the scour depth around the bridge piers. For this purpose, 240 data series including pier geometry, flow condition, sediment characteristics, and some dimensional parameters were used. Dimensional and no dimensional parameters were considered. The performance of the models was evaluated using root mean square error (RMSE), mean absolute percentage error (MAPE), and Nash–Sutcliffe efficiency (NSE) criteria. The results showed that in both models, the use of dimensional parameters for prediction leads to high prediction accuracy. The comparison between the models also showed that the LS-SVR algorithm with the criteria RMSE=46.84, MAPE=38.03, NSE=0.62 for the test data of the first model and RMSE=28.62, MAPE=38.97, NSE=0.67 for the test data results of the second pattern are more accurate than the ANFIS algorithm. This research indicates that machine-learning models are a suitable alternative to empirical models in predicting scour depth of bridge piers.

How to cite this paper: Sanaati, B. (2024). Performance evaluation of LS-SVR model in predicting scour depth in bridge piers. *Environ. Water Eng.*, 10(1), 94-108. <https://doi.org/10.22034/ewe.2023.396394.1861> [In Persian]



© Authors, Published by **Environment and Water Engineering** journal. This is an open-access article distributed under the CC BY (license <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).



EXTENDED ABSTRACT

Introduction

The existence of structures with inappropriate dimensions inevitably increases the rate of the scouring process around the bridge piers and the flow area. The scour depth around the bridge pier plays a crucial role in the safety and operation of bridges as one of the transportation infrastructures. The construction of a bridge over a river changes the flow pattern. So far, several methods have been proposed to predict scour depth. The application of empirical methods is the most common method of calculating the scour depth. Empirical methods are not accurate enough to predict the dimensions of the scour hole. Because these methods do not take into account the effect of all effective parameters on the scour phenomenon. Therefore, the main objective of this research is to predict scour depth using the LS-SVR model, which can be used as an alternative to empirical methods. For this purpose, laboratory data were used. Since a wide range of dimensional and dimensionless parameters are effective in estimating scour depth, in this research, two methods were considered in different input patterns. In the first input pattern, dimensionless parameters and in the second pattern, dimensional parameters were used and the results were compared.

Material and Methods

To predict the scour depth around the bridge piers using machine-learning models, the data used by previous researchers were used. The statistical analysis of the applied data set is given in Table 1. In Table 1, D is the diameter of the bridge pier, U is the flow velocity, U_c is the sediment critical velocity, L is the length of the pier, Y is the depth of the flow, and d_{50} is the sediment grain size, of which 50% of the bed material is finer by weight. According to Table 1, the maximum and minimum equivalent scour depths are 440 and 10 mm, respectively.

Table 1 Statistical characteristics of the used parameters

Parameters	Max	Min	Average	St.D
d_{se} (mm)	440	10	127.09	75.3
d_{50} (mm)	7.8	0.24	1.6	1.42
D (m)	1000	10	148.46	160.77
U (m/s)	12.546	0.17	0.53	0.86
U_c (m/s)	1.88	0.194	0.59	0.413
Y (mm)	600	0.15	173.9	127.75

According to the materials and methods, first, the data were analyzed for homogeneity. Then the data were used for modeling through two different patterns. In the first pattern, dimensionless parameters including shields number, critical shields number, the ratio of flow depth to average particle size, the ratio of washing water depth to average depth, and the ratio of flow velocity to critical flow velocity were considered. In the second pattern, dimensional parameters including bridge pier diameter, flow velocity, sediment critical velocity, flow depth, and average particle size were considered. In both cases, the output parameter of scouring depth is in mm. About 70% of the data was considered for training the models, and 30% of the data was considered for testing the models. Both patterns were implemented by two machine learning models, LS-SVR and ANFIS. At first, the models were validated using the training data. Statistical tests were used to check the accuracy of the models. The process of training and testing the models continued until the desired results were achieved. The estimation of the scour depth was achieved while the results of both sets of data (training and test) were acceptable using error evaluation criteria.

Results

The primary results by two machine-learning models, LS-SVR and ANFIS were evaluated using error evaluation criteria for both cases. The results are presented in Table 2. According to this table, it is clear that the performance of the second pattern in estimating scour depth is better than the first pattern. In addition, the results show that the performance of the LSSVR model is better than ANFIS. Moreover, for the dimensionless pattern using the LSSVR model, the error evaluation criteria of MAPE, RMSE, and NSE in the test data are 38.03 mm, 46.84 mm, and 0.62 mm, respectively. While these values for the ANFIS model are 50.38 mm, 61.89 mm, and 0.29 mm, respectively. For dimensional pattern using the LSSVR model, the error evaluation criteria of MAPE, RMSE, and NSE in the test data are 38.97 mm, 28.62 mm, and 0.67 mm, respectively, which is more accurate than the first pattern. Therefore, it can be concluded that the dimensional pattern has better estimation accuracy than the dimensionless pattern. Moreover, the performance of the LS-SVR model has better estimation accuracy than the ANFIS model.

Table 2 Error evaluation criteria for training and test data

Input Pattern Parameters	Model	MAPE		RMSE		NSE	
		Training	Test	Training	Test	Training	Test
Dimensionless	LS-SVR	25.71	38.03	34.65	46.84	0.79	0.62
	ANFIS	36.9	50.38	52.38	61.89	0.52	0.29
Dimensional	LS-SVR	20.21	38.97	32.65	28.62	0.81	0.67
	ANFIS	32.13	38.72	43.44	49.45	0.66	0.47

The comparison of the performance of two models was done using Taylor's diagram (Fig. 1). For both applied models, the correlation coefficient between all the data is between 0.8 - 0.9. This value is slightly higher for the LS-SVR model than the ANFIS model. Therefore, in this pattern, the LS-SVR model is more accurate than the ANFIS model in estimating the scour depth. In Fig.1b for the dimensionless parameters, the

correlation coefficient for the LS-SVR model is around 0.85, but this value is around 0.65 for the ANFIS model. In addition, the RMSD value for LS-SVR and ANFIS models are 40 and 60 mm, respectively. Despite the lower accuracy of the two models in this dimensionless pattern, the accuracy of the LS-SVR model is higher than the ANFIS model in estimating the scour depth.

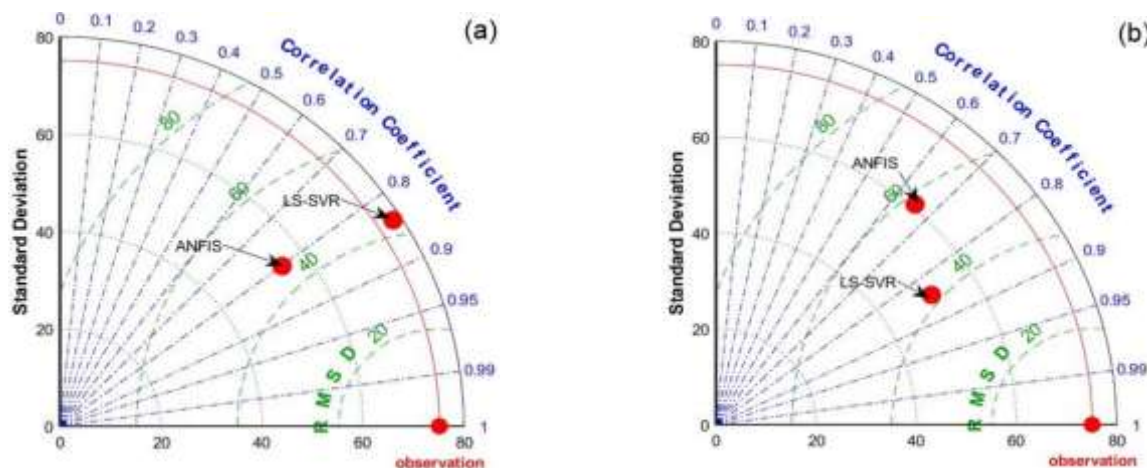


Fig. 1 Taylor diagram for input patterns: a) dimensional and b) dimensionless

Conclusions

In the present research, the scour depth around the bridge piers was predicted using two smart models, ANFIS and LS-SVR. For this purpose, the parameter values affecting the scour depth including flow velocity, critical velocity, flow depth, the average diameter of grain, and the diameter of the bridge pier, were extracted from previous experimental research. Two input patterns including dimensionless and dimensional parameters were compiled. The total number of data used was 240 samples, 70% of which were used for training and the remaining data were considered as test data. The most important results of this research can be expressed as follows:

1. In the ANFIS model, Gaussian membership function and first-order linear function were elected as the most appropriate fuzzy

membership function and the best type of output function, respectively.

2. The results of this research showed that the accuracy of both models in estimating the scour depth around the bridge piers increases using the dimensional parameters.
3. The LS-SVR model is more accurate than the ANFIS model in predicting the scour depth around the bridge piers for the used data.

Data Availability

The data and results used in this research will be available through correspondence with the corresponding author.

Conflicts of interest

The author of this paper declared no conflict of interest regarding the authorship or publication of this article.



ISSN: 2476-3683

محیط‌زیست و مهندسی آب

Homepage: www.jewe.ir

مقاله پژوهشی

ارزیابی عملکرد مدل LS-SVR در تخمین عمق آبشستگی در پایه پل‌ها

بیژن صناعتی^{*}

استادیار، گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد بوکان، بوکان، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
تاریخ دریافت: [۱۴۰۲/۰۲/۱۸]	در این پژوهش از دو مدل یادگیری ماشین شامل LS-SVR و ANFIS برای پیش‌بینی عمق آب شستگی اطراف پایه‌های پل استفاده شد. برای این منظور از ۲۴۰ سری داده شامل پارامترهای مرتبط با هندسه پایه‌ها، شرایط جریان و خصوصیات جریان و نیز پارامترهای بدون بعد استفاده شد. برای پیش‌بینی از دو الگوی ورودی استفاده شد. در الگوی اول، پارامترهای بدون بعد و در الگوی دوم پارامترهای با بعد در نظر گرفته شدند. عملکرد مدل‌ها با استفاده از معیارهای ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE)، میانگین درصد مطلق خطا (MAPE) و ضریب نش-سانتکیف (NSE) ارزیابی شدند. نتایج نشان داد که در هر دو مدل، استفاده از پارامترهای با بعد برای پیش‌بینی منجر به دقت بالاتری می‌شود. مقایسه بین مدل‌ها نیز نشان داد که الگوریتم LS-SVR با معیارهای $RMSE=46.84$ ، $MAPE=38.03$ ، $NSE=0.62$ برای داده‌های آزمون الگوی اول و $RMSE=28.62$ ، $MAPE=38.97$ ، $NSE=0.67$ برای داده‌های آزمون الگوی دوم دقت بالاتری نسبت به الگوریتم ANFIS دارد. نتایج این تحقیق حاکی از این است که مدل‌های یادگیری ماشین جایگزین مناسبی برای مدل‌های تجربی در پیش‌بینی عمق آبشستگی پایه‌های پل هستند.
تاریخ بازنگری: [۱۴۰۲/۰۳/۲۹]	
تاریخ پذیرش: [۱۴۰۲/۰۴/۱۰]	
واژه‌های کلیدی: پایه پل‌ها تخمین عمق آبشستگی یادگیری ماشین ANFIS LS-SVR	
*نویسنده مسئول: bijan.sanaati@iau.ac.ir	

نحوه استناد به این مقاله:

صناعتی، بیژن. (۱۴۰۳). ارزیابی عملکرد مدل LS-SVR در تخمین عمق آبشستگی در پایه پل‌ها. محیط‌زیست و مهندسی آب, 10(1), 108-94
<https://doi.org/10.22034/ewe.2023.381628.1838>



۱- مقدمه

که این روش‌ها تأثیر همه پارامترهای مؤثر بر پدیده مورد نظر را به خوبی در نظر نمی‌گیرند (Ettema et al. 1998). به‌عنوان نمونه، Koopaee and Valentine (2003) داده‌های عمق آبشستگی جمع‌آوری شده از کانال‌های آزمایشگاهی را با مقادیر تخمینی با استفاده از برخی معادلات تجربی مقایسه کردند. آنها دریافتند که اکثر فرمول‌ها حداکثر عمق آبشستگی را بیش از حد تخمین می‌زنند. بسیاری از معادلات تجربی مبتنی بر مدل‌های خطی یا غیرخطی با استفاده از متغیرهای اصلی مؤثر بر پدیده آبشستگی پیشنهاد شدند (Richardson and Davis 2001; Johnson 1992). مدل‌های تجربی با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی پیاده‌سازی می‌شوند. روش دیگر تخمین عمق آبشستگی استفاده از مدل‌های داده‌کاوی است. این روش‌ها که تحت عنوان مدل‌های یادگیری ماشین شناخته می‌شوند رابطه‌ای بین مجموعه‌ای از متغیرهای مؤثر به‌عنوان ورودی مدل و عمق آبشستگی به‌عنوان متغیر هدف پیدا می‌کنند. در این رویکرد نیازی به معرفی روابط ریاضی بین متغیرهای ورودی و خروجی نیست. این روش‌ها اغلب برای تخمین عمق آبشستگی اطراف پایه‌های پل با استفاده از اندازه‌های مختلف نمونه و برای موقعیت‌های مختلف استفاده شده‌اند. (Azamathulla (2012) استفاده از سامانه استنتاج فازی-عصبی تطبیقی (ANFIS^۲) را برای تخمین عمق آبشستگی در خروجی‌های کانال توصیف کرد.

Samadi et al. (2021) از روش‌های داده محور برای پیش-بینی عمق آبشستگی پایه‌ها تحت اثر جریان یکنواخت استفاده کردند. از میان روش‌های مورد استفاده، روش MARS از بهترین دقت تخمین با ضریب همبستگی ۰/۸۷۲ و مجذور مربعات خطای ۰/۲۳۳ برخوردار بود (Samadi et al. 2021). در تحقیق دیگری (Najafzadeh and Azamathulla (2015) با استفاده از روش عصبی-فازی مبتنی بر دسته‌بندی گروهی داده‌ها (NF-GMDH)^۳ به بررسی و تخمین آبشستگی تحت اثر موج با بهره‌گیری از داده‌های موجود در سوابق مطالعاتی پرداختند. آنها نتایج را با نتایج مدل درخت و روش‌های تجربی مقایسه کردند. نتایج به دست آمده نشان داد روش NF-GMDH پیش‌بینی‌های دقیق‌تری نسبت به

وجود سازه‌های با ابعاد نامناسب به‌طور اجتناب‌ناپذیری سرعت فرآیند آبشستگی اطراف پایه‌های پل و ناحیه جریان را افزایش می‌دهد. این عمل نه تنها منجر به انحراف قابل‌توجه جریان می‌شود، بلکه باعث افزایش سرعت در اطراف پایه‌های پل می‌شود. عمق آبشستگی در اطراف پایه پل نقش مهمی در ایمنی و بهره‌برداری از پل‌ها به‌عنوان عنصر زیرساخت‌ها دارد. ساخت پل بر روی رودخانه‌های گوی جریان را تغییر می‌دهد و در نتیجه دو نوع اصلی گرداب (یعنی گرداب‌های نعل اسبی و گرداب‌های داخل خیابان گرداب‌های فون کارمن^۱) ایجاد می‌شود (Shamshirband et al. 2020). از دهه ۱۹۵۰ چندین بررسی میدانی نشان داده است که توسعه آبشستگی در اطراف پایه‌ها، عامل اصلی ریزش پل‌ها در سراسر جهان است و باعث بروز مشکلات اقتصادی و زیست‌محیطی می‌شود. به دلیل اهمیت این موضوع، تحقیقات زیادی برای مطالعه پدیده آبشستگی پایه‌ها انجام شده است (Ettema et al. 2017; Ghafari and Zomorodian 2019). مطالعات عددی و تجربی انجام شده روی جریان متلاطم در اطراف پایه پل‌ها نشان می‌دهد که در طول زمان، شکل، ابعاد و مکان گرداب‌ها دچار تغییر می‌شوند (Kirkil et al. 1990; Dargahi 2008). فرآیند آبشستگی زمانی رخ می‌دهد که چنین پدیده‌هایی با رسوب بستر تعامل داشته باشند. شایان ذکر است که انتقال رسوب نیز تصادفی است و از طریق برخی رویکردهای آماری قابل برآورد است (Dodaro et al. 2014, 2016). بنابراین، می‌توان گفت فرآیند آبشستگی به‌طور کامل یک پدیده پیچیده است. تعیین عمق چاله آبشستگی اطراف پایه پل‌ها یکی از نکات مهم در طراحی پایه پل‌هاست که باید در نظر گرفته شود. از آنجایی که پدیده آبشستگی تابع عوامل مختلفی مانند لایه‌مرزی آشفته، الگوی جریان وابسته به زمان، مکانیسم انتقال رسوب، مشخصات رسوب و غیره است، تخمین دقیق مشخصات هندسی چاله کاری پیچیده است. تاکنون چندین روش برای تخمین عمق آبشستگی پیشنهاد شده است. یکی از روش‌هایی که برای تخمین عمق آبشستگی ارائه شده است، استفاده از روش‌های تجربی است. روش‌های تجربی به هنگام تخمین، اختلاف چندین برابر را نشان می‌دهند، زیرا

³Neuro-Fuzzy Based Group Method of Data Handling

¹horseshoe and wake vortices

²Adaptive Neuro Fuzzy Inference System

از اینرو هدف اصلی این پژوهش پیش‌بینی عمق آبشستگی با استفاده از مدل LS-SVR می‌باشد. همچنین نتایج LSSVR با یک مدل شبکه عصبی-فازی مقایسه شد. برای این منظور از داده‌های آزمایشگاهی استفاده شد. از آنجایی که طیف وسیعی از پارامترهای با بعد و بدون بعد در تخمین عمق آبشستگی مؤثر هستند، در این پژوهش دو شیوه در الگوهای ورودی مختلف در نظر گرفته شد که در الگوی ورودی اول از پارامترهای بی‌بعد و در الگوی دومی از پارامترهای با بعد استفاده شده است. در ادامه با مقایسه بین مدل‌ها و الگوهای ورودی بهترین مدل و بهترین الگوی ورودی برای پیش‌بینی عمق آبشستگی انتخاب شد.

۲- مواد و روش‌ها

۲-۱- داده‌های مورد استفاده

برای تخمین عمق آبشستگی اطراف پایه‌های پل با استفاده از مدل‌های یادگیری ماشین، از داده‌های مورد استفاده در تحقیق (Bateni et al. 2007) استفاده شد. تجزیه و تحلیل آماری مجموعه داده‌های اعمال شده در جدول (۱) آورده شده است. در جدول (۱)، D قطر پایه پل، U سرعت جریان، U_c سرعت بحرانی رسوب، L طول پایه، Y عمق جریان، d_{50} اندازه متوسط دانه است که ۵۰٪ مواد بستر از نظر وزنی ریزتر است. d_{se} عمق معادل آبشستگی است که از رابطه (۱) محاسبه شد (Bateni et al. 2007).

$$d_{se} = 1.35D^{0.7}Y^{0.3} \quad (1)$$

مطابق جدول (۱) بیش‌ترین و کم‌ترین عمق معادل آبشستگی به ترتیب برابر ۴۴۰ و ۱۰ mm است.

۲-۲- روش پژوهش

مطابق روند انجام کار (شکل ۱) داده‌ها ابتدا مورد آنالیز قرار گرفتند. سپس دو شیوه داده‌های ورودی که در شیوه اول (Case 1) پارامترهای بی‌بعد شامل عدد شیلدز، عدد شیلدز بحرانی، نسبت عمق جریان به اندازه متوسط ذرات، نسبت عمق آب شستگی به عمق متوسط و نسبت سرعت به سرعت بحرانی در نظر گرفته شدند. در شیوه دوم (Case 2) نیز پارامترهای با بعد شامل قطر پایه پل، سرعت جریان، سرعت بحرانی

روش‌های تجربی و مدل درخت تصمیم دارد (Najafzadeh and Azamathulla. 2015). Sreedhara et al. (2019) از دو مدل (PSO-SVM) و ANFIS در پیش‌بینی عمق آبشستگی استفاده کردند. در پژوهش دیگری (Chou and Nguyen (2022) الگوریتم جدید (MOSS) را برای پیش‌بینی عمق آبشستگی در پایه‌های پل ارائه دادند (Chou and Nguyen 2022). در تحقیق دیگری، Karami (2018) Moghadam and Sabzevari از الگوریتم ژنتیک برای اصلاح روابط عمق آبشستگی پایه پل استفاده کردند. نتایج ایشان نشان داد که مدل مورد استفاده با عملکرد بالایی توانست روابط تجربی را اصلاح کند.

یکی از مدل‌های یادگیری ماشین که در تحقیقات مختلفی استفاده شده است مدل رگرسیون بردار پشتیبان (SVR) است. این مدل یک نوع سیستم یادگیری نظارت شده است که هم برای تخمین و هم برای گروه‌بندی داده‌ها استفاده می‌شود. مدل حداقل مربعات رگرسیون بردار پشتیبان (LS-SVR) برخلاف مدل SVR به جای مسئله برنامه‌نویسی درجه دوم در حل، از معادلات خطی استفاده می‌کند. بنابراین این مدل دقت محاسباتی بالاتری نسبت به ماشین‌های بردار پشتیبان کلاسیک دارد. این مدل علیرغم سادگی اما از توانایی بالایی در پیش‌بینی‌ها دارد که این الگوریتم را به یک الگوریتم خاص و قوی تبدیل کرده است (Ghordoyee Milam et al. 2020). این الگوریتم در زمینه‌های مختلفی چون پیش‌بینی تراز آب زیرزمینی توسط (Ghordoyee Milam et al. 2020)، پیش‌بینی ضریب پخشیدگی طولی رودخانه توسط (Azar et al. 2021)، پیش‌بینی جریان ورودی به مخزن سد توسط (Kayhomayoon et al. 2022) و پیش‌بینی شاخص رد پای آب زیرزمینی توسط (Kayhomayoon et al. 2023) به کار برده شده است که نتایج تحقیقات بیانگر عملکرد مثبت این مدل بوده است (Kayhomayoon et al. 2022; Kayhomayoon et al. 2023). با این حال به ندرت در مسائل تخمین آبشستگی به کار گرفته شده است.

³Support Vector Regression

⁴Least Squares Support Vector Regression

¹Particle Swarm Optimization- Support Vector Machine

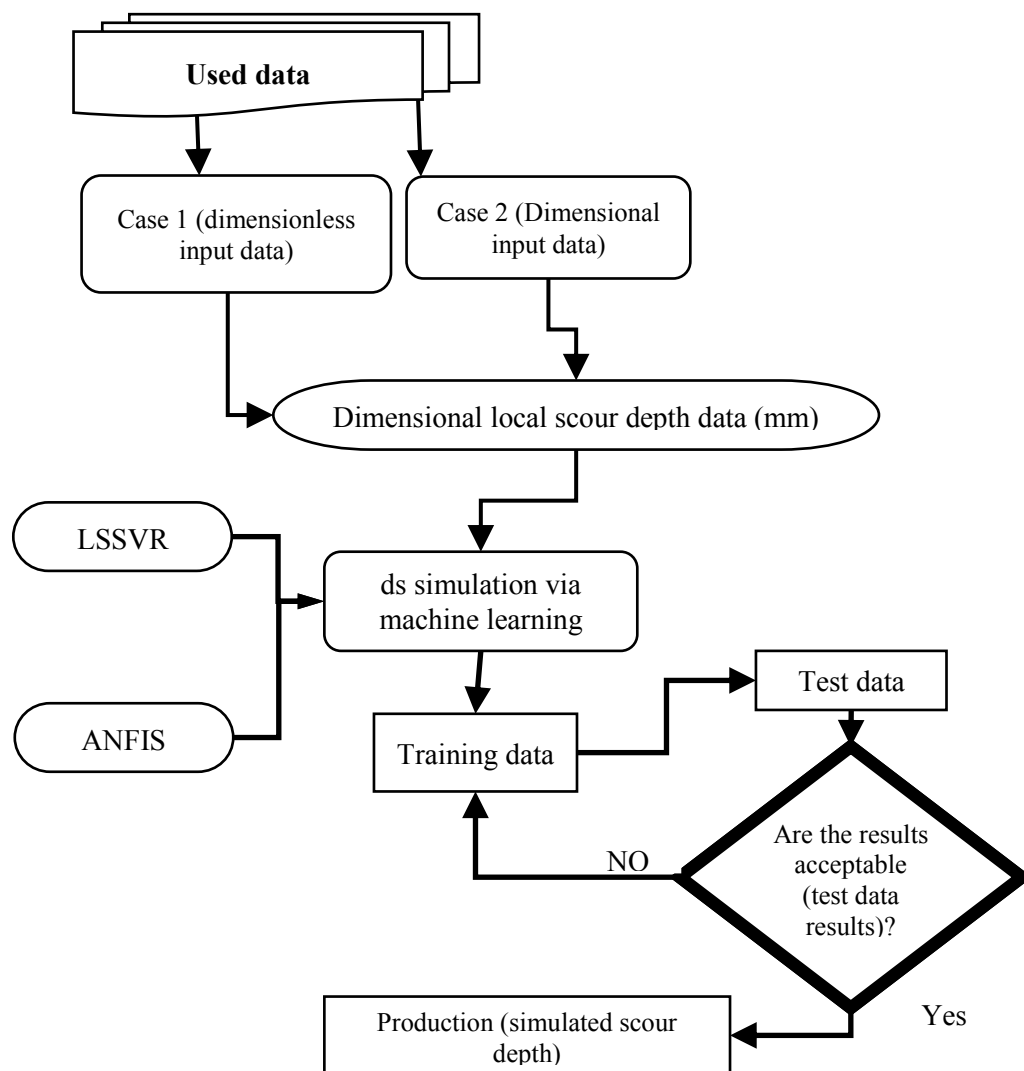
²Metahueristics Optimized Stacking System

(آموزش و آزمون) با استفاده از معیارهای ارزیابی خطای قابل قبول بودند.

جدول ۱- مشخصات آماری پارامترهای مورد استفاده
Table 1 Statistical characteristics of the used parameters

Parameters	Max	Min	Average	St.D
d_{se} (mm)	440	10	127.09	75.3
d_{50} (mm)	7.8	0.24	1.6	1.42
D (m)	1000	10	148.46	160.77
U (m/s)	12.546	0.17	0.53	0.86
Uc (m/s)	1.88	0.194	0.59	0.413
Y (mm)	600	0.15	173.9	127.75

رسوب، عمق جریان و اندازه متوسط ذرات در نظر گرفته شدند. در هر دو حالت خروجی پارامتر عمق آبشستگی بر حسب mm میباشد. حدود ۷۰٪ داده‌ها برای آموزش مدل‌ها و باقیمانده داده‌ها برای آزمون مدل‌ها در نظر گرفته شد. هر دو شیوه توسط دو مدل یادگیری ماشین مذکور اجرا شد. در ابتدا مدل‌ها به وسیله داده‌های آموزش، واسنجی شدند. بعد از مشاهده نتایج مطلوب در مرحله آموزش داده‌های آزمون مورد بررسی قرار گرفتند. مراحل آموزش و آزمون مدل‌ها تا رسیدن به نتایج مطلوب ادامه پیدا کرد. زمانی پیش‌بینی مقدار عمق آب شستگی انجام گرفت که نتایج هر دو دسته از داده‌ها



شکل ۱- نمای شماتیک مراحل پیش‌بینی عمق آب شستگی
Fig. 1 Schematic view of scour depth prediction steps

مدل سامانه استنتاج عصبی فازی تطبیقی (ANFIS) در سال ۱۹۹۳ توسط Jang (1993) ارائه شد. این مدل ترکیبی از

۲-۳- مدل‌های یادگیری ماشین

۲-۳-۱- مدل شبکه عصبی-فازی

ورودی (x_2, x_1) از نوع سوگنو و با قوانین فازی if-then ، با خروجی y ، ساختار ANFIS را می‌توان به شرح زیر به ترتیب به‌وسیله روابط (۲) و (۳) توصیف کرد (Azar et al. 2021).

$$\text{Rule 1. If } (x_1 \text{ is } A_1) \text{ and } (x_2 \text{ is } B_1) \text{ then } f_1 = p_1x_1 + q_1x_2 + r_1 \quad (2)$$

$$\text{Rule 2. If } (x_1 \text{ is } A_2) \text{ and } (x_2 \text{ is } B_2) \text{ then } f_2 = p_2x_1 + q_2x_2 + r_2 \quad (3)$$

مدل LS-SVR در مقایسه با SVR محدودیت‌های یکسانی دارد اما پیچیدگی محاسبات کمتر، دقت و سرعت بالاتری دارد. مجموعه داده‌های آموزشی مانند $\{x_k, y_k\}_{k=1}^N$ که داده ورودی آن شامل $x_k \in R^N$ و داده‌های خروجی $y_k \in R$ معرفی می‌شود. بنابراین تابع رگرسیون غیرخطی در فضای وزن دهی اولیه به‌صورت رابطه (۴) خواهد شد (Azar et al. 2021).

$$y(x) = W^T \varphi(x) + b \quad (4)$$

که، T, b, W به ترتیب بیانگر وزن‌ها، بایاس تابع رگرسیون و نشان‌دهنده ترانزاده هستند. $\varphi(x)$ ترسیم غیرخطی ورودی‌ها در فضای ویژگی با ابعاد بالا است. رگرسیونی غیرخطی مذکور توسط رابطه بهینه‌سازی (۵) قابل حل است.

$$\min j(w, e) = \frac{1}{2} W^2 W + \frac{1}{2} \gamma \sum_{k=1}^N e_k^2 \quad (5)$$

با توجه به محدودیت‌ها، معادله (۶) بدست می‌آید.

$$y_k = W^T \varphi(x_k) + b + e_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

که پارامتر تنظیم‌کننده بخش خطا است و e میزان خطا را نشان می‌دهد. مقدار γ همواره تابع تقریب را کنترل می‌کنند بنابراین مقدار آن اگر بزرگ باشد خطای بیشتری ایجاد می‌کند. حل با استفاده از شکل لاگرانژی از تابع هدف اصلی به صورت رابطه (۷) می‌باشد.

$$L(w, b, e, \alpha) = j(w, e) - \sum_{i=1}^N \alpha_i \{W^T \varphi(x_i) + b + e_i - y_i\} \quad (7)$$

$$y(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k K(x, x_k) + b \quad (8)$$

که، $K(x, x_i)$ تابع کرنل نامیده می‌شود و مقدار آن طبق رابطه (۹) محاسبه می‌شود.

شبکه عصبی مصنوعی و سامانه استنتاج فازی است. رایج‌ترین روش آموزش در مدل ANFIS تابع سوگنو (Sugeno) است که از الگوریتم یادگیری پیوندی برای تعیین پارامترهای سیستم فازی به‌منظور آموزش مدل استفاده می‌کند. برای دو

که، A و B به ترتیب مجموعه‌های فازی هستند، q, p و r پارامترهای نتیجه مدل هستند که در مرحله آموزش ارزیابی می‌شوند. ساختار ANFIS شامل ۵ لایه می‌باشد. لایه اول یا لایه ورودی، در این لایه ورودی‌ها از توابع عضویت مختلف عبور کرده و درجه عضویت گره‌های ورودی به بازه‌های مختلف فازی با استفاده از توابع عضویت مشخص می‌شود. توابع عضویت انواع مختلفی دارد که می‌توان به توابع مثلثی، دوزنقه‌ای، گوسی و تابع زنگوله‌ای اشاره کرد. در این پژوهش از تابع عضویت گوسی استفاده شده است. در لایه دوم یا گره قانده که در آن مقادیر ورودی به هر گره در هم ضرب شده و حاصل که وزن قانون‌ها می‌باشد به دست می‌آید. در این لایه از عملگر "AND" استفاده شده است. لایه سوم، گره‌های این لایه وزن قانون‌ها را نرمال‌سازی می‌کنند. گره‌های نتیجه که لایه قوانین نامیده می‌شود و در این لایه قانون‌ها به دست می‌آیند. لایه پنجم آخرین لایه شبکه است شامل یک تک گره بوده که با جمع کردن همه مقادیر ورودی به آن، خروجی کلی سیستم را محاسبه می‌کند. این لایه نتایج هر قانون فازی را طی فرآیند غیرفازی سازی به خروجی غیرفازی تغییر شکل می‌دهد.

۲-۳-۲- مدل حداقل مربعات میانگین رگرسیون بردار پشتیبان

(Suykens and Vandewalle 1999) مدل حداقل مربعات ماشین بردار پشتیبان (LS-SVR) را معرفی کردند.

که، α_i ضریب لاگرانژ است. بر اساس شرایط کان - تاکر (Karush - Kuhn- Tucker) مدل LS-SVR به‌منظور تابع تقریب به‌صورت رابطه (۸) نوشته می‌شود (Kuhn et al. 1951).

خروجی آن به صورت تابع می‌باشد، در نتیجه بهترین نوع تابع خروجی، خطی مرتبه اول انتخاب شد. بقیه پارامترهای بهینه در جدول (۲) قابل مشاهده می‌باشند. مقادیر بهینه پارامترهای LS-SVR. هسته گاوسی در روش LS-SVR دارای دو پارامتر σ^2 و γ است که مقدار بهینه آن به ترتیب برابر با $5/365$ و $136/03$ به دست آمد.

جدول ۲- پارامترهای بهینه شده مدل ANFIS
Table 2 Optimized parameters of ANFIS

Model	Parameter	value	
ANFIS	Fuzzy structure	Sugeno-type	
	Initial FIS for training	Genfis3	
	The type of membership functions	Gaussian	
	The membership function of output	Linear	
	Optimization method	Hybrid	
	Number of fuzzy rules	10	
	The maximum number of epochs	2000	

۲-۳- مقایسه مدل‌ها و الگوهای استفاده شده

همان‌طور که پیشتر نیز ذکر شد برای بررسی عملکرد مدل‌ها از دو الگوی ورودی استفاده شد. الگوی اول پارامترهای بی‌بعد را شامل می‌شد که شامل چهار پارامتر عدد شیلدز، شیلدز بحرانی، نسبت عمق جریان به قطر پایه D ، نسبت عمق آبشستگی به قطر پایه بود. الگوی دوم شامل پارامترهایی بود که از پارامترهای دارای بعد برای تخمین عمق آب شستگی استفاده شد که در این پژوهش از پارامترهای عمق جریان، سرعت جریان، قطر پایه و قطر ذرات بستر استفاده شد. نتایج اولیه به صورت معیارهای ارزیابی خطا در هر الگو و توسط دو مدل یادگیری ماشین LS-SVR و ANFIS ارزیابی شد که در جدول (۳) ارائه شده است. مطابق این جدول مشخص است که عملکرد الگوی دوم در تخمین عمق آبشستگی بهتر از الگوی اول بوده است. همچنین نتایج نشان می‌دهد که عملکرد LSSVR نسبت به ANFIS بهتر بوده است؛ به طوری که در الگوی بی‌بعد معیارهای ارزیابی خطای $MAPE$ ، $RMSE$ و NSE در داده‌های آزمون و در مدل LSSVR به ترتیب برابر $38/03$ ، $46/84$ و $0/62$ mm بوده است. در حالی که این مقادیر برای داده‌های ANFIS به ترتیب برابر $50/38$ ، $61/89$

$$K(\chi, \chi_k) = \exp\left(-\frac{\|\chi - \chi_k\|^2}{\sigma^2}\right) \quad (9)$$

در این پژوهش از تابع کرنل پایه شعاعی^۱ برای حل تابع تقریب رگرسیون غیرخطی یعنی رابطه (۸) استفاده شد.

۲-۴- معیارهای ارزیابی خطا

برای ارزیابی الگوها معیارهای ارزیابی برای سنجش الگوها از خطای جذر میانگین مربعات نرمال شده (RMSE) به صورت رابطه (۱۰)، درصد میانگین مطلق خطا (MAPE) به صورت رابطه (۱۱) و ضریب نش - ساتکلایف (NSE) به صورت رابطه (۱۲) استفاده شد. هرچقدر مقدار $RMSE$ و $MAPE$ به صفر نزدیک‌تر باشند و ضریب NSE به یک نزدیکتر باشد، کارایی مدل موردنظر نیز بهتر است (Mobayen et al. 2023).

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_p - x_o)^2}{n}} \quad (10)$$

$$MAPE = \frac{\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_o - x_p}{x_o} \right|}{n} \times 100 \quad (11)$$

$$NSE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (x_p - x_o)^2}{\sum_{i=1}^n (x_o - \bar{x}_o)^2} \quad (12)$$

که، X_p و X_o به ترتیب مقدار داده‌های واقعی و شبیه‌سازی شده هستند.

۳- یافته‌ها و بحث

در این بخش ابتدا نتایج مدل‌ها آورده شده است و سپس در ادامه بحث روی نتایج به دست آمده صورت گرفته است.

۳-۱- پارامترهای استفاده شده در مدل‌های LS-SVR و ANFIS

هر یک از مدل‌های مورد استفاده نیاز به تنظیم برخی پارامترهای خود می‌باشند. مقادیر تنظیمی این مدل‌ها در واقع ساختار مدل را تکمیل و موجب عملکرد بهتر مدل‌ها در پیش‌بینی می‌شوند. ساختار مناسب مدل ANFIS و مقادیر بهینه برای پارامترهای آن توسط آموزش مدل تعیین شد. این مقادیر در جدول (۲) قابل مشاهده می‌باشد. مطابق جدول تابع عضویت گوسی مناسب‌ترین تابع عضویت فازی انتخاب. از آنجایی که در ANFIS از نوع فازی سوگنو استفاده شده و

¹Radial basis kernel function

است. از این رو می توان نتیجه گرفت که الگوی با بعد دارای دقت تخمین بهتری نسبت به الگوی بی بعد است. همچنین عملکرد مدل LS-SVR دارای دقت تخمین بهتری نسبت به ANFIS می باشد.

و ۰/۲۹ mm بوده است. در الگوی با بعد نیز معیارهای ارزیابی خطای MAPE, RMSE و NSE در داده های آزمون و در مدل LSSVR به ترتیب برابر ۳۸/۹۷، ۲۸/۶۲ و ۰/۶۷ mm به دست آمده است که نسبت به الگوی اول دارای دقت بالاتری

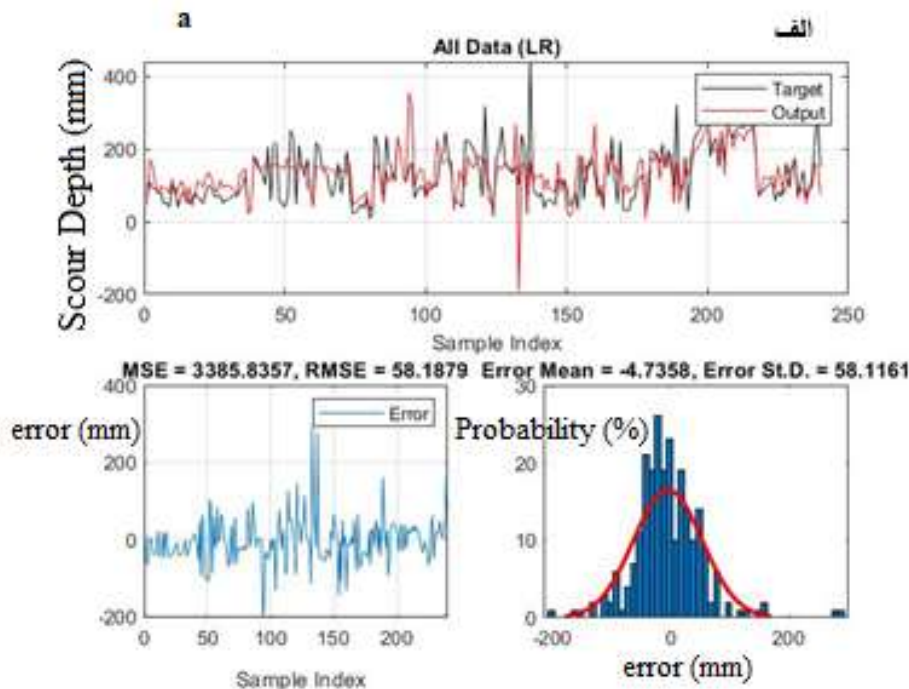
جدول ۳- معیارهای ارزیابی خطا برای داده های آموزش و آزمون

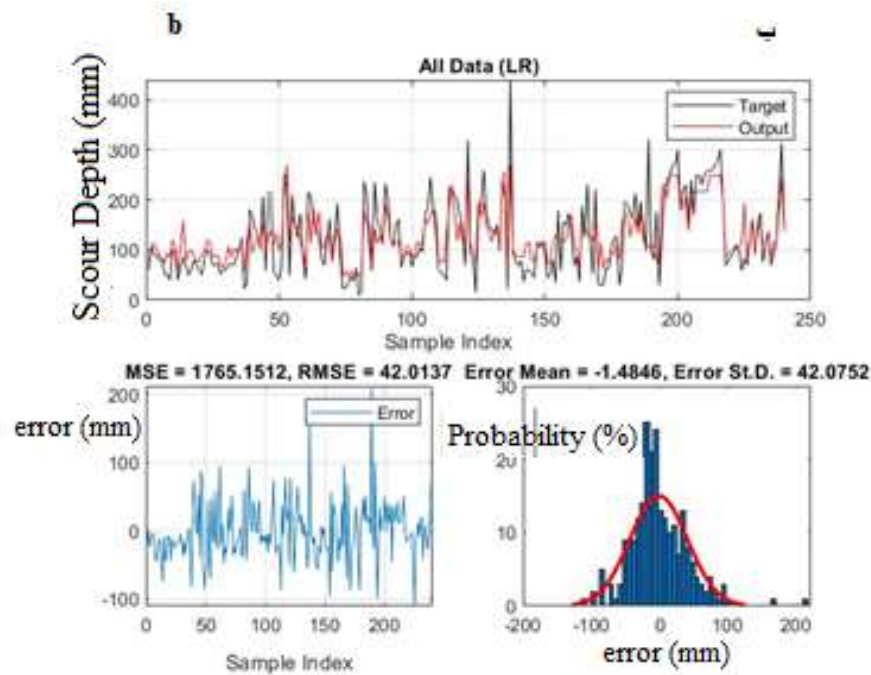
Table 3 Error evaluation criteria for training and test data

Input Pattern Parameters	Model	MAPE		RMSE		NSE	
		Training	Test	Training	Test	Training	Test
Dimensionless	LS-SVR	25.71	38.03	34.65	46.84	0.79	0.62
	ANFIS	36.9	50.38	52.38	61.89	0.52	0.29
With Dimension	LS-SVR	20.21	38.97	32.65	28.62	0.81	0.67
	ANFIS	32.13	38.72	43.44	49.45	0.66	0.47

در برخی نقاط به بین ۳۰۰ تا ۲۰۰ mm - رسیده است. در حالی که مقدار خطا برای مدل LS-SVR بین ۱۵۰ تا ۱۰۰ mm - است. مقدار انحراف معیار مدل ANFIS در مقایسه با مدل LS-SVR بیش تر است (به ترتیب ۵۸/۱۱ و ۴۲/۱۱). بنابراین برای پیش بینی با استفاده از پارامترهای بی بعد مدل LS-SVR دقت بیش تری داشته است.

نمودار داده های مشاهداتی و شبیه سازی شده برای هر دو الگو در شکل های (۲) و (۳) نشان داده شده است. برای حالت پارامترهای بی بعد (شکل ۳) مشخص است که مدل ANFIS تخمین داده ها را با خطای بیش تری انجام داده است. این ضعف بخصوص در نقاطی مانند نقاط اوج یا قعر بیش تر مشاهده می شود و با توجه به نمودار خطا، خطای حاصل از پیش بینی



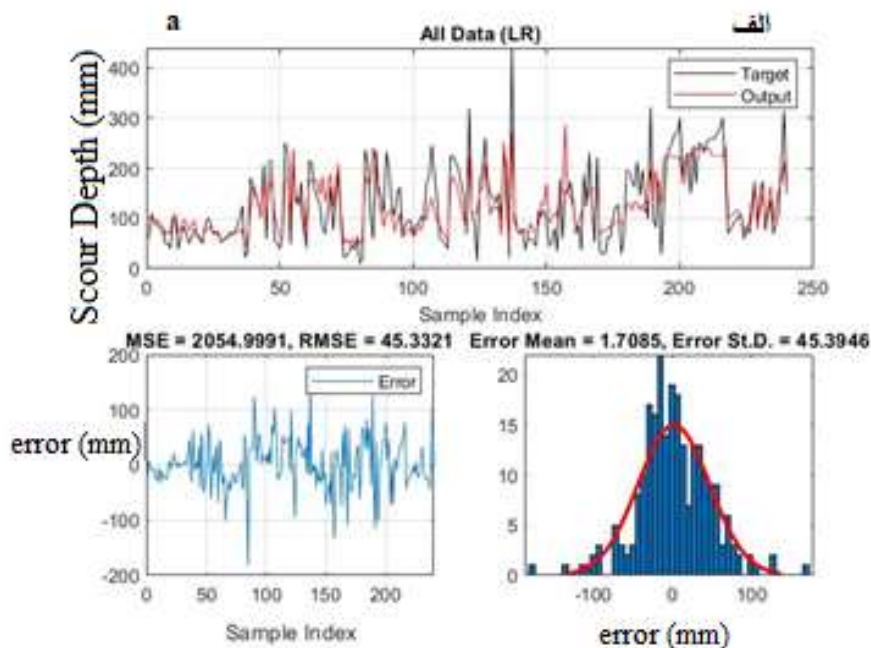


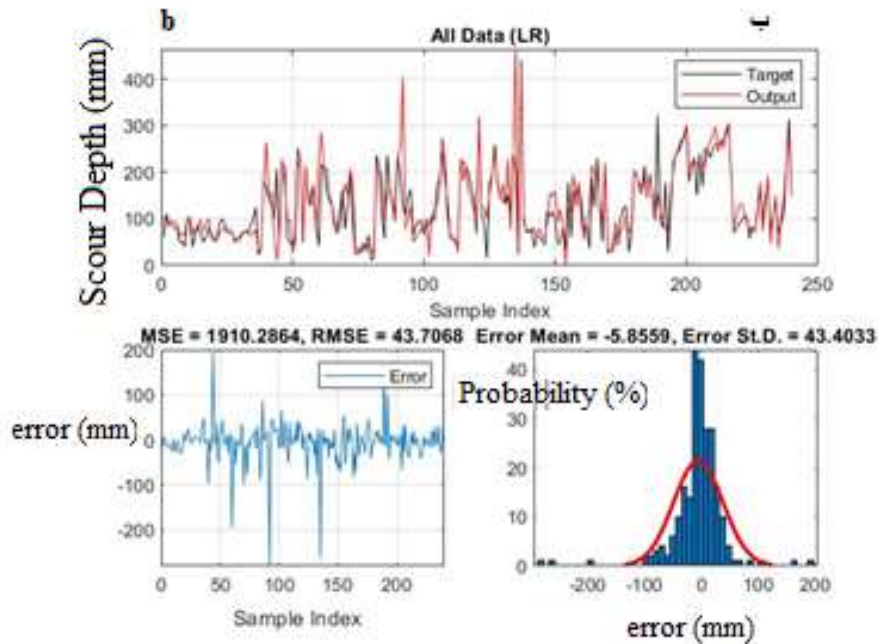
شکل ۲- نمودار داده‌های مشاهداتی و شبیه‌سازی شده، الگو پارامترهای بی بعد الف) ANFIS ب) LS-SVR

Fig. 3 Diagram of observed and simulated data; Horizontal axis: number of data, vertical axis, scour depth - pattern of dimensional parameters a) ANFIS b) LS-SVR

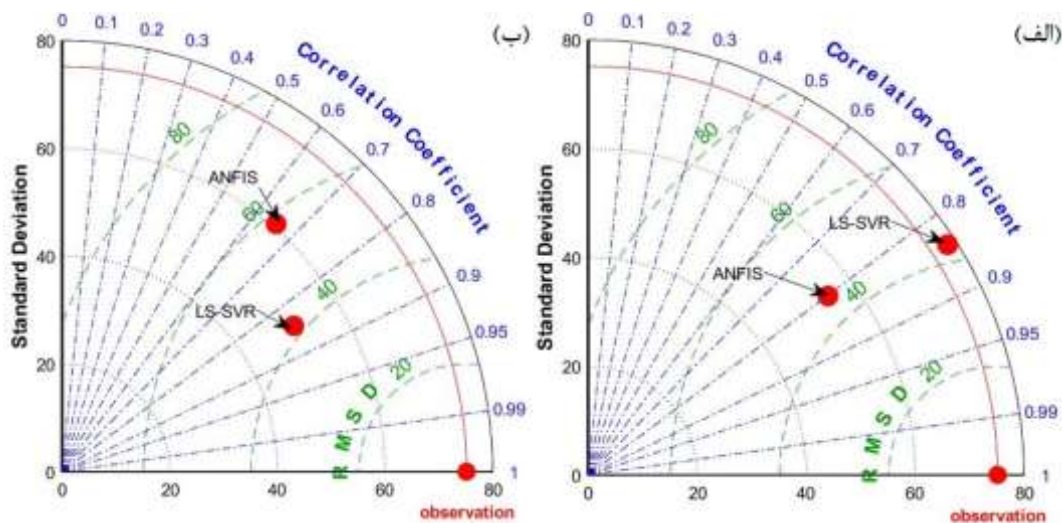
زمانی نیز نشان می‌دهد در برخی نقاط فاصله بین داده‌های مشاهداتی و شبیه‌سازی شده با ANFIS بیشتر است، درحالی‌که این ضعف‌ها در مدل LS-SVR تا حدودی پوشش داده شده است.

برای حالت استفاده از پارامترهای با بعد (شکل ۳)، نتایج هر دو مدل نزدیک‌تر هستند. مدل LS-SVR با استفاده از پارامترهای با بعد پیش‌بینی را با خطای ۴۲/۰۱ انجام داده است، در مقابل مدل ANFIS با نتایج نزدیک‌تری (RMSE=45.32) پیش‌بینی را انجام داده است. شکل سری





شکل ۳- نمودار داده‌های مشاهداتی و شبیه‌سازی شده، الگو پارامترهای با بعد: الف) ANFIS ب) LS-SVR
 Fig. 3 diagram of observed and simulated data pattern of dimensional parameters: a) ANFIS b) LS-SVR



شکل ۴- دیاگرام تیلور برای الگوهای ورودی: الف- با بعد و ب- بی بعد
 Fig. 4 Taylor diagram for input patterns: a) dimensional and b) dimensionless parameters

مقایسه مدل‌ها با استفاده از دیاگرام تیلور انجام و نتایج آن در شکل (۴) نشان داده است. این دیاگرام از آن جهت حائز اهمیت است که مقایسه مدل‌ها را با در نظر گرفتن سه معیار انحراف معیار (محور عمودی)، انحراف جذر میانگین مربعات (RMSD) (کمان‌های داخل ربع دایره) و ضریب همبستگی (کمان ربع دایره) انجام می‌دهد. مطابق شکل‌های مربوطه، ضریب همبستگی بین کل داده‌ها در الگو با پارامترهای با بعد

برخوردار است. در شکل مربوط به پارامترهای بی‌بعد نیز ضریب

مدل‌ها نشان داد که مدل‌های محاسبات نرم در مقایسه با مدل‌های سنتی مانند مدل‌های تجربی HEC- Mississippi، Jafari Bavi و Laursen and Toch 18 که در تحقیق (Olyaei et al. 2018) استفاده شده است، از دقت بیشتری برخوردار است. نتایج این پژوهش نشان داد که دقت مدل‌های یادگیری ماشین به کار رفته در حالت استفاده از پارامترهای با بعد به مراتب بالاتر از حالت استفاده از پارامترهای بی بعد است. این نتایج همسو با نتایج تحقیق Ghazanfari Hashemi and Etemad-Shahidi (2012) می‌باشد. همچنین Majedi Asl and Valizadeh (2020) در تحقیق خود نشان دادند که استفاده از پارامترهای با بعد منجر به تخمین بهتری از عمق آبشستگی اطراف پایه پل‌ها در مقایسه با استفاده از پارامترهای بی بعد با به کار بردن الگوریتم‌های یادگیری ماشین می‌شود. نکته‌ای دیگری که در این پژوهش حائز اهمیت است، این است که نتایج دو الگو به یکدیگر نزدیک بود. این بدین معنی است که مدل‌های یادگیری ماشین در شرایط کمبود داده نیز عملکرد مناسبی دارند، که این یک مزیت است.

۴- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، عمق آب شستگی اطراف پایه پل قائم با استفاده از دو مدل هوشمند ANFIS و LS-SVR تخمین زده شد. برای این منظور مقادیر پارامترهای مؤثر بر عمق آبشستگی شامل سرعت جریان، سرعت بحرانی، عمق جریان، قطر متوسط ذرات و قطر پایه پل‌ها از پژوهش‌های قبلی استخراج و دو الگوی ورودی شامل پارامترهای بدون بعد و پارامترهای با بعد، تدوین شد. تعداد کل داده‌های مورد استفاده ۲۴۰ نمونه بود که ۷۰٪ آن برای آموزش و باقی‌مانده داده‌ها نیز به‌عنوان داده‌های آزمون در نظر گرفته شدند. مهم‌ترین نتایج حاصل از این پژوهش به صورت زیر قابل بیان می‌باشد.

۱- در مدل ANFIS تابع عضویت گو سی مناسب‌ترین تابع عضویت فازی و بهترین نوع تابع خروجی، خطی مرتبه اول انتخاب شد.

۲- پارامترهای با بعد تأثیر بیشتری بر میزان عمق آب شستگی دارند. دقت هر دو مدل در پیش‌بینی عمق آب شستگی اطراف پایه پل با استفاده از پارامترهای با بعد در مقایسه با پارامترهای بی‌بعد بیشتر است.

همبستگی برای مدل LS-SVR در حدود ۰/۸۵ است. حال آنکه این مقدار برای مدل ANFIS حدود ۰/۶۵ است. همچنین مقدار RMSD برای مدل LS-SVR و ANFIS به ترتیب برابر ۴۰ و ۶۰ mm است. بنابراین با وجود اینکه در این الگو دقت مدل‌ها کمتر می‌باشد، اما دقت مدل LS-SVR بیش‌تر از مدل ANFIS در تخمین عمق آبشستگی اطراف پایه پل با استفاده از پارامترهای بدون بعد است.

مطابق شکل (۳-الف)، در سناریوی اول از یک تیغه آب‌شکن T شکل استفاده شده است. مطابق شکل (۳-الف) مشاهده شد که وضعیت آبشستگی در نوک تیغه به میزان حداکثر ۳۶ mm بوده و ۱۳ mm رسوب‌گذاری به صورت موضعی در مجاورت نوک تیغه رخ داده است. کانتور سرعت در شکل (۴-الف)، نشان‌دهنده کاهش میزان سرعت در ناحیه آب‌شکن و افزایش میزان سرعت در ناحیه فوقانی آب‌شکن است. همچنین یکنواختی کانتور سرعت در قسمت مربوط به آب‌شکن برای این سناریو منجر به یکنواختی رسوب (بدون ایجاد تلماسه یا فرسایش بالا) در ناحیه تحتانی می‌شود.

در سناریوی دوم وضعیت آبشستگی در نوک تیغه به میزان حداکثر ۱۱ mm است (شکل ۳-ب). از طرفی دیگر ۱۳ mm رسوب‌گذاری به صورت موضعی در کناره نوک تیغه آب‌شکن I شکل در وسط کانال رخ داده است. کانتور سرعت نشان‌دهنده کاهش سرعت در ناحیه آب‌شکن I شکل و افزایش سرعت در ناحیه فوقانی آب‌شکن است (شکل ۴-ب). کانتور سرعت در قسمت تیغه آب‌شکن تغییرات بسیاری دارد که این امر منجر به ایجاد ناحیه فرسایشی و تلماسه‌ای در نزدیکی یکدیگر می‌شود. به طوری که کاربرد آب‌شکن منجر به کاهش سرعت جریان در قبل و بعد از آب‌شکن شده است. دلیل آن را می‌توان به صورت مانع عمل کردن آب‌شکن دانست که منجر به کاهش میزان فرسایش در آن ناحیه می‌شود. عکس این موضوع در دیواره بالایی نیز صادق بوده و عدم وجود آب‌شکن در آن قسمت باعث افزایش سرعت جریان و به تبع آن افزایش آبشستگی می‌شود.

در پژوهش حاضر تخمین عمق آبشستگی پایه پل‌ها با استفاده از مدل‌های یادگیری ماشین صورت گرفت. دو الگو برای ورودی مدل‌ها در نظر گرفته شد، که در الگو اول پارامترهای با بعد و در الگو دوم پارامترهای بی‌بعد مؤثر بر عمق آبشستگی در نظر گرفته شد. معیارهای ارزیابی خطای به دست آمده از

تضاد منافع نویسندگان

نویسندگان این مقاله اعلام می‌دارند که، هیچ‌گونه تضاد منافی در رابطه با نویسندگی و یا انتشار این مقاله ندارند.

۳- مدل LS-SVR دقت بالاتری نسبت به مدل ANFIS در پیش‌بینی عمق آب شستگی اطراف پایه‌های پل دارد.

دسترسی به داده‌ها

داده‌ها حسب درخواست، از طرف نویسنده مسئول از طریق ایمیل قابل ارسال می‌باشد.

References

- Azar, N. A., Milan, S. G., & Kayhomayoon, Z. (2021). The prediction of longitudinal dispersion coefficient in natural streams using LS-SVM and ANFIS optimized by Harris hawk optimization algorithm. *J. Contamin. Hydrol.*, 240, 103781. DOI: [10.1016/j.jconhyd.2021.103781](https://doi.org/10.1016/j.jconhyd.2021.103781).
- Azamathulla, H. M. (2012). Gene expression programming for prediction of scour depth downstream of sills. *J. Hydrol.*, 460, 156–159. DOI: [10.1016/j.jhydrol.2012.06.034](https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2012.06.034).
- Batani, S. M., Borghei, S. M., & Jeng, D. S. (2007). Neural Network and neurofuzzy assessments for scour depth around bridge piers. *Eng. Appl. Artif. Intell.*, 20(3), 401-414. DOI: [10.1016/j.engappai.2006.06.012](https://doi.org/10.1016/j.engappai.2006.06.012).
- Chou, J. S., & Nguyen, N. M. (2022). Scour depth prediction at bridge piers using metaheuristics-optimized stacking system. *Autom. Construct.*, 140, 104297. DOI: [10.1016/j.autcon.2022.104297](https://doi.org/10.1016/j.autcon.2022.104297).
- Dargahi, B. (1990). Controlling mechanism of local scour. *J. Hydraul. Eng.*, 116, 1197–1214. DOI: [10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1990\)116:11\(1197\)1-12](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1990)116:11(1197)1-12).
- Dodaro, G., Tafarojnoruz, A., Calomino, F., Gaudio, R., Stefanucci, F., Adduce, C., & Sciortino, G. (2014). An experimental and numerical study on the spatial and temporal evolution of a scour hole downstream of a rigid bed. In: *Proceedings of the International Conference on Fluvial Hydraulics, RIVER FLOW 2014*. Taylor and Francis Group plc, Lausanne, Switzerland, pp. 1415–1422. DOI: [10.1201/b17133-189](https://doi.org/10.1201/b17133-189).
- Dodaro, G., Tafarojnoruz, A., Sciortino, G., Adduce, C., Calomino, F., & Roberto, G. (2016). Modified Einstein sediment transport method to simulate the local scour evolution downstream of a rigid bed. *J. Hydraul. Eng.*, 142, 4016041. DOI: [10.1061/\(asce\)hy.1943-7900.0001179](https://doi.org/10.1061/(asce)hy.1943-7900.0001179).
- Ettema, R., Melville, B. W., & Barkdoll, B. (1998). Scale effect of pier-scour experiments. *J. Hydraul. Eng.*, 124, 639–642. DOI: [10.1061/\(asce\)0733-9429\(1998\)124:6\(639\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9429(1998)124:6(639)).
- Ettema, R., Constantinescu, G., & Melville, B. W. (2017). Flow-field complexity and design estimation of pier-scour depth: Sixty years since Laursen and Toch. *J. Hydraul. Eng.*, 143(9), 03117006. DOI: [10.1061/\(asce\)hy.1943-7900.0001330](https://doi.org/10.1061/(asce)hy.1943-7900.0001330).
- Ghafari, H., & Zomorodian, M. A. (2019). Investigating the local scour around group bridge piers in cohesive Soils. *Journal of Water and Soil Science*, 23(4), 109-123. [In Persian]
- Ghordoyee Milan, S., Aryaazar, N., Javadi, S., & Razdar, B. (2020). Simulation of groundwater head using LS-SVM and comparison with ANN and MLR. *Hydrogeol.*, 5(1), 118-133. [In Persian]
- Jafari Babil Olyaei, A., hassanzadeh, Y., Alami, M., and kardan, N. (2018). Estimation of Bridge Pier Scour using Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System Optimized with Imperialist competitive algorithm. *Iran. J. Irrig. Drain.*, 12(4), 872-884.
- Jang, J. S., (1993). ANFIS: adaptive-network-based fuzzy inference system. *IEEE Trans. Syst. Man. Cybern.*, 23(3), 665–685. DOI: [10.1109/21.256541](https://doi.org/10.1109/21.256541).
- Johnson, P. A., (1992). Reliability-based pier scour engineering. *J. Hydraul. Eng.*, 118, 1344–1358. DOI: [10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1992\)118:10\(1344\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1992)118:10(1344)).
- Karami Moghadam, M., & Sabzevari, T. (2018). Modification of Bridge Piers Scour Depth Equations using Genetic Algorithm. *Environ.*

- Water Eng.*, 4(2), 101-114. DOI: [10.22034/jewe.2018.112907.1223](https://doi.org/10.22034/jewe.2018.112907.1223).
- Kayhomayoon, Z., Naghizadeh, F., Malekpoor, M., Arya Azar, N., Ball, J., & Ghordoyee Milan, S. (2022). Prediction of evaporation from dam reservoirs under climate change using soft computing techniques. *Environ. Sci. Pollut. Res.*, 30(10), 27912. DOI: [10.1007/s11356-022-23899-5](https://doi.org/10.1007/s11356-022-23899-5).
- Kirkil, G., Constantinescu, S. G., & Ettema, R. (2008). Coherent structures in the flow field around a circular cylinder with scour hole. *J. Hydraul. Eng.*, 134, 572-587. DOI: [10.1061/\(asce\)0733-9429\(2008\)134:5\(572\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9429(2008)134:5(572)).
- Koopaei, K. B., & Valentine, E.M. (2003). Bridge Pier Scour in Self Formed Laboratory Channels; Technical Report; University of Glasgow: Glasgow, UK.
- Kuhn, H. W., & Tucker, A. W. (1951). Nonlinear programming. *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium. Berkeley: University of California Press*. pp. 481-492. MR 0047303.
- Majedi Asl, M., & Valizadeh, S. (2019). Application of SVM algorithm in predicting vertical pier scour depth. *J. Water Soil Sci.*, 23(4), 165-181. [In Persian]
- Mobayen, R., Najafzadeh, M., & Farrahi-Moghaddam, K. (2023). Evaluation of regression-based soft computing techniques for estimating energy loss in gabion spillways. *Environ. Water Eng.*, 9(2), 241-255. [In Persian]. DOI: [10.22034/ewe.2022.329153.1724](https://doi.org/10.22034/ewe.2022.329153.1724).
- Najafzadeh, M., & Azamathulla, H. M. (2015). Neuro-fuzzy GMDH to predict the scour pile groups due to waves. *J. Comput. Civil Eng.*, 29(5), 04014068. DOI: [10.1061/\(asce\)cp.1943-5487.0000376](https://doi.org/10.1061/(asce)cp.1943-5487.0000376).