



Research Paper

Investigation of Mathematical Model and Development of I-JAYA Method to Optimally Estimate the Parameters of Soil Water Retention Curve

Reza Askary¹, Mohsen Najarchi^{2*} and Hossein Mazaheri³

¹PhD Scholar, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Arak Branch, Islamic Azad University, Arak, Iran

²Assoc. Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Arak Branch, Islamic Azad University, Arak, Iran

³Assist. Professor, Department of Chemical Engineering, Faculty of Engineering, Arak Branch, Islamic Azad University, Arak, Iran

Paper information

Received: January 01, 2022

Revised: March 17, 2022

Accepted: March 18, 2022

Keywords:

Matric Potential
Meta-heuristic Algorithms
Optimization
Soil Texture
Statistical Parameters

*Corresponding author:
m-najarchi@iau-arak.ac.ir



Abstract

Direct soil water retention curve (SWRC) measurement is laborious, time-consuming, and expensive. To estimate its parameters, mathematical models and optimization approaches are applied. In this study, an improved alternative method to solve the optimization problem was introduced and developed. To evaluate the efficiency of this method, 12 soil samples with 6 different textures from 9 different regions of the world were used. The optimization equations were solved using a genetic algorithm (GA) and standard mathematical models, and the best model was chosen based on Taylor diagrams, R^2 , and computing time. The Bimodal versions of Fredlund-Xing (FX-b) and Brooks-Corney (BC) mathematical models represented the best and poorest findings of this stage, with R^2 values of 0.913 and 0.825, respectively. Then, the optimization problem is solved with differential evolution (DE), Salp Swarm Algorithm (SSA), Jaya, and improved Jaya (I-Jaya) method, and the mean values of R^2 were obtained 0.919, 0.931, 0.921, and 0.958, respectively. The results indicated a 16% improvement in the average R^2 , by selecting the suitable mathematical model and also using the I-Jaya.

© Authors, Published by **Environment and Water Engineering** journal. This is an open-access paper distributed under the CC BY (license <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).



Introduction

The soil water retention Curve (SWRC) has vast applications in soil and water management problems related to agriculture, ecology, and environmental issues. However direct measurement is laborious, time-consuming, and costly. Therefore, mathematical models have

been considered by researchers that have some parameters which must be properly estimated. In most cases, the objective function is Root Mean Square Error (RMSE) between measured data observation points of matric potential- water content percentage of soil samples and model prediction. There are several mathematical



models and many optimization solvers in this area. Both classic algorithms such as Linear and Nonlinear Programming and evolutionary algorithms such as Genetic Algorithm (GA), Differential Evolution (DE) and, Salp Swarm Algorithm (SSA) are used for solving the optimization problem of the SWRC. Both kinds of mentioned algorithms have their drawbacks. For example, needing the initial guesses and depending on tuning parameters are weak points of NP and GA methods, respectively. In this research, the aim is to investigate different mathematical models of SWRC and select the most appropriate model according to the statistical indices of R^2 and RMSE. Therefore, the I-Jaya algorithm for solving the SWRC problem without the aforementioned problems was developed and analyzed.

Material and Methods

The problem-solving process with the I-JAYA method began with the production of the initial population of design variables. In this study, the design variables are the SWRC parameters for the corresponding mathematical model such as the Van Genuchten with four free parameters (VG model). According to the objective function, its best and worst values as well as corresponding design variables were selected, and then the solutions were modified. If the updated value of the decision variable improves the objective function, it is replaced with the previous values, otherwise, the previous values are preserved. The above processes were repeated until the best results were attained.

There is a considerable similarity between JAYA and particle swarm algorithms based on the efficiency of using the weight coefficient for solving SWRC problems. Hence, to boost the convergence speed and efficiency of Jaya, the algorithm was modified by introducing weight coefficients (ω_1 and ω_2), which are numerical values after several trials, and tuning efforts were obtained as 2.5 for ω_1 and 0.3 for ω_2 . Equations 1, 2, and 3 represent the formulation of I-JAYA.

$$X'_{j,k,i} = X_{j,k,i} + \omega_1 r_1 (X_{j,best,i} - X_{j,k,i}) - \omega_2 r_2 (X_{j,worst,i} - X_{j,k,i}) \quad (1)$$

$$\text{If } X'_{j,k,i} > X_{j,max} : X'_{j,k,i} = X_{j,max} \quad (2)$$

$$\text{If } X'_{j,k,i} < X_{j,min} : X'_{j,k,i} = X_{j,min} \quad (3)$$

The weight coefficients accelerate the algorithm to converge to optimal solutions and keep the

algorithm from non-optimal responses. In the I-JAYA algorithm, terms $(X_{j,best,k} - |X_{j,i,k}|)$ and $(X_{j,worst,k} - |X_{j,i,k}|)$ are converted to $(X_{j,best,k} - X_{j,i,k})$ and $(X_{j,worst,k} - X_{j,i,k})$, respectively. Equations 2 and 3 are used to guarantee that the algorithm finds responses in an acceptable set. In these equations, if the numerical value of a decision variable is acceptable outside of the range, its boundary value is replaced. This technique is used to further involve boundary values in the solution process.

SWRC are established using the corresponding relations and parameters introduced by Brooks and Corney (BC) and, Van Genuchten with four and five free parameters (VG4, VG5), and the bimodal versions adopted from Fredlund and Xing (FX) and, Kosugi. To select the best mathematical model, using the genetic algorithm method for each soil sample. Then, the optimization problem was solved for all mathematical models, and the statistical index R^2 and computational time were selected to select the best mathematical model. The problem of optimizing the estimation of SWRC parameters for the mathematical model was solved by using GA, DE, SSA, and JAYA algorithms as control methods as well as the I-JAYA method developed in this research. The performance of different optimization methods has been compared using R^2 and RMSE values, which are criteria for measuring modeling accuracy. The closer R^2 is to number one, the more accurate the model is.

Results

Using the index of average execution time, coefficient of determination (R^2), and the results of the Taylor diagram, Fredlund and Xing method (FX-b), with $R^2 = 0.932$ and Brooks and Corney with $R^2 = 0.825$ showed the best and worst mathematical models, respectively. The highest and lowest computational volume is related to the Kosugi method in bimodal mode (K-b) with mean-time $t = 25s$, and Brooks and Corney method with $t = 5s$, respectively. The Van Genuchten models in bimodal mode (VG4-b, VG5-b) also have a coefficient of determination of 0.844 and 0.8905, respectively, which indicates the desired capability of these models despite the low computational volume with an average of less than $t = 9s$. It should be noted that the average computational time of these models is approximately 8.52 s, which is comparable to the computational cost of other

mathematical models. Then, to optimize the SWRC parameters, GA, DE, SSA, and Jaya algorithms were used as control methods as well as the Improved Jaya method.

The performance of different optimization methods using R^2 and RMSE values, which are criteria for measuring modeling accuracy, have been compared (Table 1).

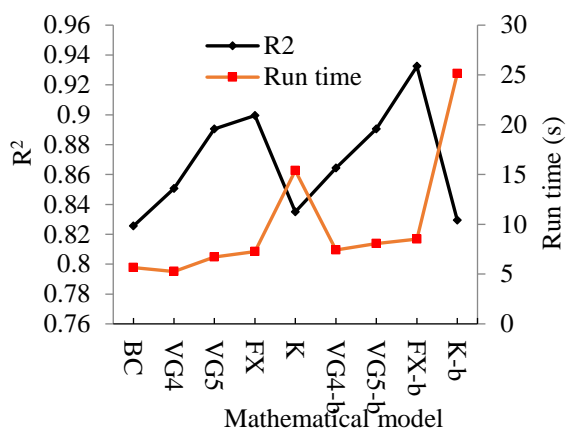


Fig. 1 Average values of R^2 and computational time of different mathematical models of SWRC for soil samples obtained from optimization by the GA

The model's accuracy improves when R^2 approaches 1. The mean values for GA, DE, SSA, JAYA, and I-JAYA methods are 0.913, 0.919, 0.931, 0.921, and 0.958, respectively. The performance of the SSA method is better than the JAYA method which by making changes in the JAYA method and upgrading it, led to better performance of this method than the JAYA algorithm and other methods. These changes do not make much difference in the computational volume and have even reduced it. Also, the average RMSE for the above methods is 0.206, 0.103, 0.053, 0.036, and 0.0199, respectively, with the I-JAYA method having the lowest error rate.

Table 1 Statistical indices of R^2 and RMSE for the different optimization methods and soil samples

| Soil's Code | I-Jaya | | Jaya | | SSA | | DE | | GA | |
|-------------|--------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|---------|
| | R^2 | RMSE | R^2 | RMSE | R^2 | RMSE | R^2 | RMSE | R^2 | RMSE |
| 1012 | 0.926 | 0.0548 | 0.904 | 0.01318 | 0.913 | 0.00866 | 0.905 | 0.01101 | 0.902 | 0.04720 |
| 1132 | 0.953 | 0.00125 | 0.922 | 0.00197 | 0.934 | 0.00336 | 0.923 | 0.00418 | 0.935 | 0.01390 |
| 1240 | 0.967 | 0.00985 | 0.966 | 0.02207 | 0.948 | 0.03264 | 0.952 | 0.06960 | 0.903 | 0.09076 |
| 1260 | 0.982 | 0.00013 | 0.943 | 0.00014 | 0.946 | 0.00017 | 0.936 | 0.00038 | 0.853 | 0.00119 |
| 2100 | 0.970 | 0.05780 | 0.962 | 0.03964 | 0.947 | 0.33300 | 0.948 | 0.32129 | 0.917 | 0.66345 |
| 3140 | 0.960 | 0.08797 | 0.921 | 0.24468 | 0.935 | 0.29766 | 0.922 | 0.47110 | 0.952 | 0.38101 |
| 3270 | 0.948 | 0.00458 | 0.912 | 0.01161 | 0.928 | 0.01399 | 0.915 | 0.03387 | 0.943 | 0.03376 |
| 3272 | 0.965 | 0.00258 | 0.934 | 0.00326 | 0.945 | 0.00427 | 0.935 | 0.02104 | 0.948 | 0.01622 |
| 4470 | 0.942 | 0.01366 | 0.898 | 0.03304 | 0.914 | 0.02290 | 0.899 | 0.11334 | 0.883 | 0.06715 |
| 4480 | 0.980 | 0.00099 | 0.891 | 0.00114 | 0.930 | 0.00057 | 0.898 | 0.00217 | 0.869 | 0.00095 |
| 4490 | 0.970 | 0.00266 | 0.886 | 0.00192 | 0.922 | 0.00743 | 0.892 | 0.00421 | 0.930 | 0.01324 |
| 4500 | 0.935 | 0.04538 | 0.911 | 0.07560 | 0.915 | 0.05791 | 0.908 | 0.39258 | 0.926 | 0.46283 |
| Average | 0.958 | 0.019 | 0.921 | 0.036 | 0.931 | 0.0530 | 0.919 | 0.103 | 0.913 | 0.206 |

Conclusions

To obtain SWRC, mathematical models and optimization techniques were used with observational data of 12 soil samples with 6 different textures from 9 various locations of the world from the UNSODA database, and the following results were achieved:

1. To select the most suitable mathematical model of SWRC, using the genetic algorithm and Taylor diagram, the Bimodal version of Fredlund

and Xing (FX) and Brooks and Corney (BC) with average coefficients of determination 0.932 and 0.825 showed the highest and the lowest accuracy, respectively.

2. To optimize the SWRC parameters, a new I-JAYA algorithm was developed for the Bimodal version of the Fredlund and Xing mathematical model. In 12 evaluated samples, the mentioned algorithm presented more

consistent results with the measured points than GA, DE, SSA, and JAYA algorithms.

3. The I-JAYA algorithm minimizes the values of the objective function to a better value than the control algorithms.

4. When compared to the other four methods used, the I-JAYA algorithm performed better and had a higher coefficient of determination than the JAYA, SSA, DE, and GA algorithms.

The results of this study can be used in a practical way to optimally estimate the parameters of SWRC. It is also suggested that using data and the results of this research and using Artificial Neural Networks (ANN) methods and combining them with the

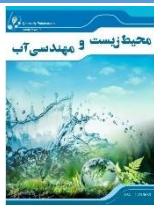
optimization methods including the I-JAYA method. Then we can analyze the data to estimate the hydraulic coefficients of the soil in the unsaturated state.

Data Availability

The data used in this research are taken from UNSODA which is publicly available and the results of this research are presented in the paper.

Conflicts of Interest

The authors of this paper declared no conflict of interest regarding the authorship or publication of this paper.



ISSN: 2476-3683

محیط‌زیست و مهندسی آب

Homepage: www.jewe.ir

مقاله پژوهشی

بررسی مدل ریاضی و توسعه روش I-JAYA به منظور برآورد بهینه پارامترهای منحنی نگهداشت آب خاک

رضا عسکری^۱، محسن نجارچی^{۲*} و حسین مظاهری^۳

^۱دانشجوی دکتری، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران
^۲دانشیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران
^۳استادیار، گروه مهندسی شیمی، دانشکده فنی و مهندسی، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران

اطلاعات مقاله

چکیده

تاریخ دریافت: [۱۴۰۰/۱۰/۱۱]
تاریخ بازنگری: [۱۴۰۰/۱۲/۲۶]
تاریخ پذیرش: [۱۴۰۰/۱۲/۲۷]

واژه‌های کلیدی:

الگوریتم‌های فراکوشی
بافت خاک
بهینه‌سازی
پارامترهای آماری
پتانسیل ماتریک

اندازه‌گیری مستقیم منحنی نگهداشت آب خاک، پرزحمت، وقت‌گیر و هزینه‌بر می‌باشد، لذا از مدل‌های ریاضی و فن‌های بهینه‌سازی برای برآورد پارامترهای آن استفاده می‌شود. در این پژوهش، روش I-JAYA برای حل مسئله بهینه‌سازی معرفی و توسعه داده شد. برای بررسی کارایی این روش، ۱۲ نمونه خاک با ۶ بافت متفاوت از ۹ منطقه مختلف دنیا مورد استفاده قرار گرفت. بدین منظور، ابتدا با به‌کارگیری الگوریتم ژنتیک و مدل‌های متداول ریاضی مسئله بهینه‌سازی حل شده و با استفاده از نمودارهای Taylor، متوسط شاخص ضریب تعیین و زمان محاسباتی، مناسب‌ترین مدل انتخاب شد. مدل ریاضی Fredlund-Xing در حالت دو-وجهی و مدل Brooks-Corney به ترتیب با متوسط ضریب تعیین ۰/۹۱۳ و ۰/۸۲۵، بهترین و بدترین نتایج این مرحله را ارائه دادند. سپس با استفاده از مناسب‌ترین مدل، مسئله بهینه‌سازی با الگوریتم‌های I-JAYA، JAYA، SSA، DE و همچنین I-JAYA حل شده و مقادیر متوسط ضریب تعیین به ترتیب ۰/۹۱۹، ۰/۹۳۱، ۰/۹۲۱ و ۰/۹۵۸ به دست آمد. نتایج حاکی از ارتقا ۱۶٪ متوسط شاخص ضریب تعیین، با انتخاب مدل مناسب ریاضی و همچنین استفاده از روش I-JAYA می‌باشد.

*نویسنده مسئول:

m-najarchi@iau-arak.ac.ir



۱- مقدمه

رطوبت خاک یکی از شاخص‌های کلیدی در بسیاری از زمینه‌ها مانند آبیاری، هیدرولوژی و علوم خاک می‌باشد. خصوصیات فیزیکی و مکانیکی هر خاک با کاهش یا افزایش میزان رطوبت آن دستخوش تغییرات می‌شود (Zhang et al. 2017). میزان رطوبت آب در خاک توسط دو نیروی اساسی جذب و کشش سطحی تأمین می‌شود (Fetter and Kreamer 2021). نیروی جذب سطحی تأمین‌کننده نیروی نگاه‌دارنده آب بر روی سطح ذرات خاک و نیروی کشش

از شاخص‌های کلیدی در بسیاری از زمینه‌ها مانند آبیاری، هیدرولوژی و علوم خاک می‌باشد. خصوصیات فیزیکی و مکانیکی هر خاک با کاهش یا افزایش میزان رطوبت آن دستخوش تغییرات می‌شود (Zhang et al. 2017). میزان رطوبت آب در خاک توسط دو نیروی اساسی جذب و کشش سطحی تأمین می‌شود (Fetter and Kreamer 2021). نیروی جذب سطحی تأمین‌کننده نیروی نگاه‌دارنده آب بر روی سطح ذرات خاک و نیروی کشش



مرتب‌های مقادیر پایش شده رطوبت و پتانسیل ماتریک^۶ برای نمونه‌های مختلف خاک، و با استفاده از مدل‌های منحنی نگهداشت آب خاک یک مسئله بهینه‌سازی برازش غیرخطی (بین داده‌های پایش شده - نتایج پیش‌بینی شده توسط مدل) با تابع هدف مشخص (معمولاً حداقل نمودن میانگین مربعات خطا) تعریف شده و توسط روش‌های بهینه‌سازی حل می‌شود. در زمینه بهینه‌سازی نیز از روش‌های کلاسیک و هم از روش‌های فراکاوشی تکاملی^۷ استفاده می‌شود. (Lu et al. (2008) برای برازش پارامترهای مدل ریاضی، از روش بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک (GA)^۸ و داده‌های مشاهداتی نمونه‌های سیلت لومی، ماسه ریز و همچنین خاک شنی در حالات زهکشی شده و نشده استفاده کردند، نتایج حاکی از کارایی بهتر این روش نسبت به روش‌های برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی است. Maggi et al. (2017) برای برآورد پارامترهای منحنی نگهداشت آب خاک، الگوریتم تکامل دیفرانسیلی (DE)^۹ را بر روی خاک‌هایی با بافت‌های مختلف و با مدل‌های ریاضی گوناگون بررسی و با نتایج نرم‌افزار RETC مقایسه کردند. Zhang et al. (2018) با معرفی روش جدید بهینه‌سازی الگوریتم انبوه سالپ (SSA)^{۱۰}، پارامترهای مدل‌های ریاضی را محاسبه نموده‌اند. نتایج با روش‌های دسته‌ذرات (PSO)^{۱۱} و جستجوی دیفرانسیلی (DSA)^{۱۲} مقایسه شده که نشان از دقت بیشتر این روش جدید می‌باشد. (Wang et al. (2018) از الگوریتم JAYA به منظور به دست آوردن پارامترهای مدل (Van Genuchten 1980) استفاده نمودند. نتایج حاکی از کارایی بالای این الگوریتم علی‌رغم سادگی و عدم وابستگی به پارامترهای خاص می‌باشد.

در این پژوهش، دو هدف دنبال شد. اول انتخاب مناسب‌ترین روش مدل‌سازی ریاضی منحنی نگهداشت آب خاک و دوم توسعه روشی کارا برای برآورد بهینه پارامترهای این منحنی. سپس الگوریتم I-JAYA معرفی و مسئله بهینه‌سازی

سطحی تأمین‌کننده نیروی نگه‌دارنده آب بین ذرات خاک می‌باشند. رابطه بین اندرکنش و تلفیق این دو نیرو با مقدار رطوبت خاک توسط منحنی نگهداشت آب خاک (SWRC)^۱ بیان می‌شود (Assouline et al. 1998). خصوصیات خاک با استفاده از پارامترهای منحنی نگهداشت آب خاک از طریق این منحنی به دست آمده و به عنوان ورودی‌های کلیدی در شبیه‌سازی‌های تبخیر و تعرق، نفوذ، انتشار املاح و رواناب مورد استفاده قرار می‌گیرد. (Xing et al. 2018) روش‌های برآورد منحنی نگهداشت آب خاک عبارت‌اند از روش‌های مستقیم، شبکه عصبی و برازش مدل‌های تحلیلی- ریاضی (Fields et al. 2016; Bezerra-Coelho et al. 2018). از روش‌های مستقیم می‌توان به روش‌های آزمایش صفحه فشاری (Bittelli and Flury 2009; Solone et al. 2012)، فیلتر صفحه‌ای، تensiومتر^۲، روش کنترل مکش اسمزی^۳ و روش سانتیفریوژی اشاره نمود. (Too et al. 2014). روش‌های اندازه‌گیری مستقیم، علاوه بر اینکه می‌تواند زمان‌بر و پرهزینه باشند (Schaap et al. 2001; Mohammadi and Vanclouster 2011)، نیازمند نیروی متخصص و کالیبراسیون دستگاه‌ها نیز هستند.

روش‌های شبکه عصبی نیز امروزه در علوم مختلف کاربرد وسیعی داشته و در واقع چیزی فراتر از برازش آماری غیرخطی با توابع وزن متعدد در لایه‌های شبکه نیستند و درک عمیقی از مکانیسم و فیزیک پدیده (در اینجا مکانیسم اندرکنش آب و خاک) نمی‌دهد. اما مدل‌های ریاضی منحنی نگهداشت بیشتر مورد توجه محققان قرار گرفته‌اند. این مدل‌ها برآمده از حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل اساسی اندرکنش آب و خاک (به طور مثال معادله ریچاردسون^۴ و معادله بوزینسک^۵) با فرضیات ساده‌کننده می‌باشند (Navidi et al. 2021). بنابراین هم در برگیرنده مکانیسم‌های بنیادی مسئله بوده که با داده‌های مشاهداتی کالیبره شده و هم سبب درک بهتری می‌شوند. کلیات کارهای پژوهشی انجام شده بدین صورت است که با داشتن داده‌های آزمایشگاهی یا مشاهداتی مجموعه‌ای از زوج

⁶Matric Potential

⁷Evolutionary Metaheuristic Methods

⁸Genetic Algorithm

⁹Differential Evaluation

¹⁰Salp Swarm Algorithm

¹¹Particle Swarm Optimization

¹²Differential Search Algorithm

¹Soil Water Retention Curve

²Tensiometer

³Osmotic Suction Control Method

⁴Richardson Equation

⁵Boussinesq Equation

نگهداشت آب خاک است (Likos and Lu 2004). در بسیاری از موارد برای سادگی کار $m=1-(1/n)$ قرار می دهند (Fredlund et al. 2012). در این حالت به مدل چهار متغیره (Van Genuchten 1980) مشهور است.

Fredlund and Xing (1994) یکی از مدل های بسیار متداول و با کاربرد وسیع علمی و عملی مشابه مدل Van Genuchten پنج متغیره را مطابق رابطه (۳) ارائه نمودند. این مدل بر اساس توزیع اندازه منافذ خاک ارائه شده است. اگر بتوان توزیع اندازه منافذ خاک را به دست آورده و یا پیش بینی کرد، منحنی نگهداشت آب خاک به صورت منحصر به فرد از همین رابطه تعیین می شود.

$$\theta(h) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{[\ln(2.7183 + (\alpha h)^n)]^m} \quad (3)$$

Kosugi (1996) برای مشخص کردن توزیع اندازه منافذ ذرات خاک، با استفاده از تابع خطا و اضافه نمودن پارامتر بدون بعد σ ، رابطه (۴) را ارائه نمود.

$$\theta(h) = \theta_r + \frac{1}{2} (\theta_s - \theta_r) \operatorname{erfc} \left[\frac{\ln(h/h^m)}{\sqrt{2}\sigma} \right] \quad (4)$$

که erfc تابع خطا و h^m هد ماتریک^۱ متناظر با میانه اندازه ذرات می باشد. وجود تابع خطا در این رابطه باعث افزایش حجم محاسباتی به صورت غیرخطی در خلال بهینه سازی می گردد. اصطلاحاً به این نوع از مدل ها، مدل های اصلی تک وجهی^۲ گفته می شود. در بسیاری از حالت ها برای بالابردن دقت پیش بینی از مفهوم دو-وجهی^۳ برای هر مدل استفاده شده که در آن توابع وزن تعریف و در حین برازش با داده های مشاهداتی این وزن ها تعیین می شوند. فرم عمومی رابطه دو-وجهی به صورت رابطه (۵) می باشد (Haghverdi et al. 2020).

$$\theta(h) = (\theta_s - \theta_r) \sum_{i=1}^2 \omega_i \Gamma(h)_i + \theta_r \quad (5)$$

که، $\Gamma(h)$ توابع اشباع کلاسیک اساسی بوده و مقدار آن برای مدل های مختلف به صورت روابط (۶) تا (۹) می باشد.

$$VG: \Gamma(h) = \left[\frac{1}{1 + (\alpha h)^n} \right]^{1-\frac{1}{n}} \quad (6)$$

منحنی نگهداشت آب خاک با آن حل شدند. از جدیدترین الگوریتم ها در این حوضه به عنوان شاهد استفاده شد.

۲- مواد و روش ها

۲-۱- منحنی نگهداشت آب خاک

منحنی نگهداشت آب خاک از مشخصه های مهم فیزیکی خاک و بیانگر رابطه بین پتانسیل ماتریک و رطوبت خاک است (Wosten and Van Genuchten 1988; Tietje and Tapkenhinrichs 1993). برای تعیین منحنی مشخصه باید با اندازه گیری های زوجی، رطوبت خاک را در مقادیر مختلف پتانسیل ماتریک تعیین کرد. (Liu et al 2019). منحنی مشخصه رطوبتی خاک نسبت به زمان و مکان متغیر است و اطلاعات لازم در مورد ویژگی های فیزیکی خاک از قبیل تخلخل و هدایت هیدرولیکی را ارائه می کند (Kirkham 2014). با توجه به تغییرات وسیع در بافت و خصوصیات فیزیکی و مکانیکی انواع خاک ها، مدل های مختلفی برای تعیین منحنی نگهداشت آب خاک توسعه داده شده اند.

۲-۲- مدل های ریاضی منحنی نگهداشت آب خاک

Brooks and Corey (1964) مدلی را برای تعیین منحنی نگهداشت آب خاک به صورت رابطه (۱) پیشنهاد نمودند.

$$\theta(h) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)(\alpha h)^{-\lambda} \quad \text{for } h > \alpha^{-1} \quad (1)$$

$$\theta(h) = \theta_s \quad \text{for } h < \alpha^{-1}$$

این مدل غیرخطی چهار متغیره از مدل های بسیار کاربردی در این زمینه می باشد. در این رابطه، $\theta(h)$ رطوبت حجمی ($\text{cm}^3 \text{ cm}^{-3}$)، θ_s درصد رطوبت اشباع، θ_r درصد رطوبت باقی مانده، h پتانسیل ماتریک یا مکش ($\text{cm H}_2\text{O}$) و α, λ پارامترهای تجربی حاصل از برازش داده های میدانی می باشند. از رایج ترین مدل های منحنی نگهداشت آب خاک که به طور گسترده مورد استفاده قرار می گیرد، مدل مشهور (Van Genuchten 1980) پنج متغیره مطابق رابطه (۲) می باشد.

$$\theta(h) = \theta_r + \frac{1}{2} (\theta_s - \theta_r) \left[\frac{1}{1 + (\alpha h)^n} \right]^m \quad (2)$$

که، n و m ضرایب ثابت می باشد. n مرتبط با نحوه توزیع منافذ در ساختار خاک، و m مرتبط با تقارن شکل منحنی

¹ Capillary Pressure Head

² Unimodal

³ Biomodal

۲-۳-۲- روش‌های حل مسئله بهینه‌سازی

۲-۳-۱- مسئله بهینه‌سازی

برای یافتن پارامترهای مدل‌های منحنی نگهداشت آب خاک می‌توان یک مسئله بهینه‌سازی در حالت عمومی به صورت رابطه (۱۰) تعریف نمود (Chen et al. 2016).

$$\text{Minimizing} = \sum_{i=1}^n (E_i - M_i)^2$$

Subjected to :

Mathematical Models of SWRC

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (11)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n [E_i - M_i]^2}{\sum_{i=1}^n [M_i - \bar{M}]^2} \quad (12)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (E_i - M_i)^2} \quad (13)$$

$$RMSD = \sigma_{est}^2 + \sigma_{obs}^2 - 2\sigma_{est}\sigma_{obs}R \quad (14)$$

۲-۳-۲- روش I-JAYA

از اهداف این پژوهش معرفی و استفاده از روش بهینه‌سازی I-JAYA^۵ برای حل مسئله بهینه‌سازی منحنی نگهداشت آب خاک می‌باشد. الگوریتم JAYA یکی از الگوریتم‌های فراابتکاری^۶ موفق ارائه شده توسط Rao (2016) می‌باشد. این روش برخلاف بسیاری از روش‌های تکاملی، پارامترهای تنظیمی کمی دارد. اساس الگوریتم JAYA بر اصول زیر استوار است. (۱) انتخاب بهترین و بدترین جواب‌ها در هر مرحله. (۲) تسریع در اصلاح و هدایت الگوریتم به سمت بهترین جواب‌ها. (۳) اجتناب از سوق یافتن به سمت بدترین جواب‌ها در مرحله بعدی. با این کار مشکل کندی الگوریتم-های فرا ابتکاری که از جدی‌ترین موانع استفاده آن‌ها در پردازش‌های سریع است، تا حدود زیادی مرتفع شده و جواب‌های مناسب‌تری یافت می‌شود.

در ضمن در هر مرحله، بهترین و بدترین جواب‌ها با توجه به ضابطه تابع هدف قابل‌محاسبه بوده و برای هدایت الگوریتم نیز از رابطه (۱۵) استفاده می‌شود که در آن $X_{j,k,i}$ متغیر تصمیم مسئله به شکل یک ماتریس سه‌بعدی است. در آن j اندیس مربوط به هر کدام از متغیرهای تصمیم، k اندیس

$$VG_m : \Gamma(h) = \left[\frac{1}{1 + (\alpha h)^n} \right]^m \quad (7)$$

$$FX : \Gamma(h) = \left[\ln(2.7183 + (\alpha h)^n) \right]^m \quad (8)$$

$$K : \Gamma(h) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{\ln(h/h_m)}{\sqrt{2}\sigma} \right] \quad (9)$$

رابطه (۱۰) مانند هر مسئله بهینه‌سازی دیگر شامل مفاهیم تابع هدف، متغیرهای تصمیم، متغیرهای حالت و محدودیت‌های فیزیکی و اجرایی است. این مسئله از نوع مقید، غیرخطی، غیرمحدب و با متغیرهای گسسته می‌باشد. حل چنین مسائل بهینه‌سازی در حالت کلی چالش‌برانگیز بوده و روش‌های کلاسیک ریاضی و تکاملی مختلفی برای آن توسعه داده شده است. در رابطه مذکور تابع هدف ارائه‌شده و هدف از حل مسئله بهینه‌سازی، کمینه‌نمودن مقدار آن با رعایت قیود مسئله می‌باشد. در اینجا قید مسئله، تطابق دادن نقاط در معادلات ریاضی منحنی نگهداشت آب خاک است. E مقادیر مشاهداتی (پایش یا آزمایش شده) مختلف رطوبت خاک به ازای پتانسیل ماتریک خاک و M مقادیر رطوبت خاک پیش‌بینی‌شده به وسیله مدل مربوطه می‌باشد. برای سنجش عملکرد نتایج حاصله از مدل بهینه‌سازی، معمولاً از معیار ضریب تعیین (R^2)^۱ استفاده می‌شود. شاخص‌های آماری مورد استفاده در این پژوهش عبارت‌اند از انحراف معیار استاندارد (σ)^۲، ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE)^۳ و ریشه میانگین مربعات اختلاف (RMSD)^۴ که به صورت روابط (۱۱) تا (۱۴) تعریف می‌شوند (Montgomery et al. 2011). در رابطه (۱۱) برای محاسبه انحراف معیار استاندارد، مجموعه‌ای از داده‌ها به کار برده می‌شود که در آن n و \bar{x} به ترتیب تعداد و میانگین داده‌ها می‌باشند. اگر بجای X ، از داده‌های میدانی و یا نتایج حاصل از مدل استفاده شود، به ترتیب مقادیر متناظر انحراف معیار استاندارد داده‌های مشاهداتی (σ_{obs}) و انحراف معیار استاندارد نتایج حاصل از مدل (σ_{est}) به دست می‌آیند.

¹Coefficient of Determination

²Standard Deviation

³Root Mean Square Error

⁴Root Mean Square Difference

⁵Improved Jaya

⁶Meta-Heuristic Algorithms

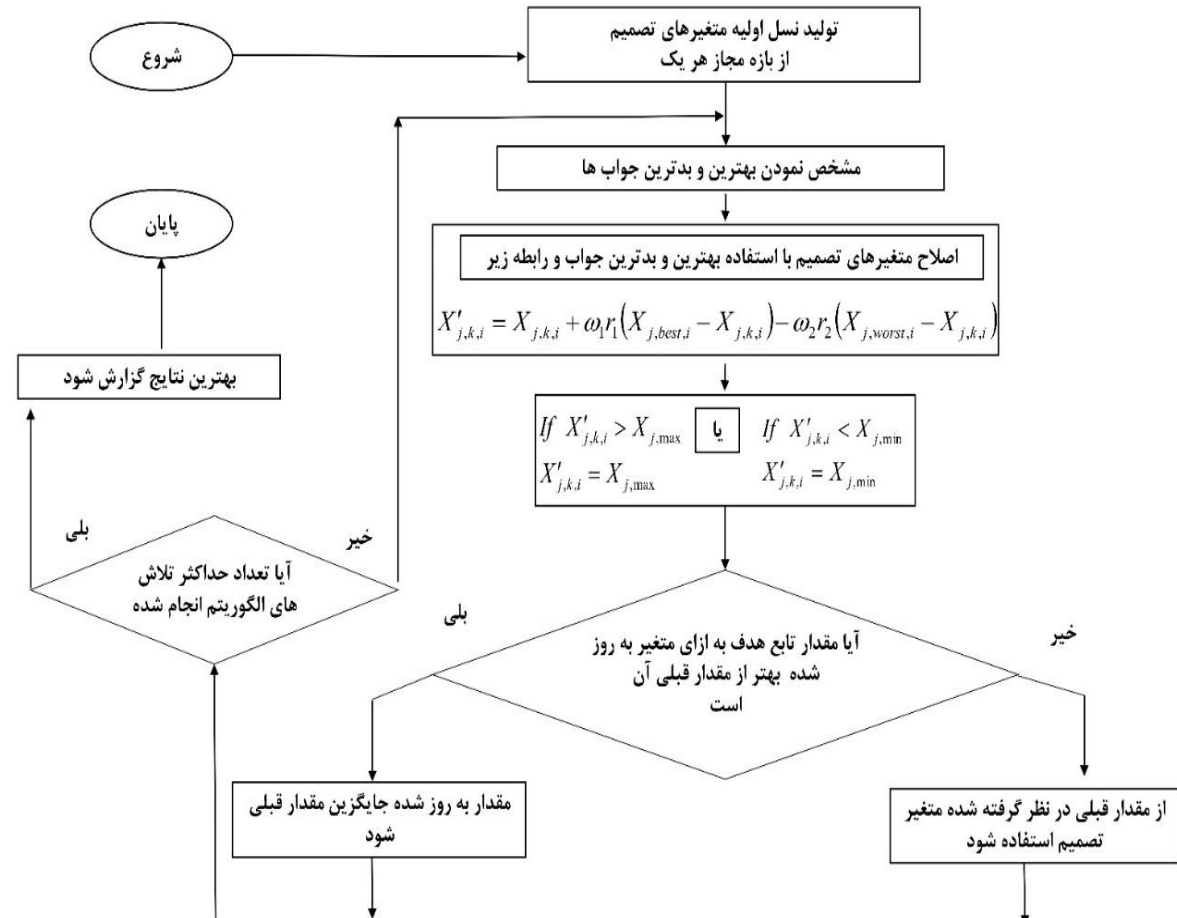
مربوط به مقادیر کاندید در نظر گرفته شده برای آن و i اندیس مربوط به هر مرحله از تلاش الگوریتم می‌باشند. Γ_1 و Γ_2 اعداد تصادفی بین صفر و یک هستند. $X_{j, best, i}$ و $X_{j, worst, i}$

$$X'_{j, k, i} = X_{j, k, i} + r_1 (X_{j, best, i} - |X_{j, k, i}|) - r_2 (X_{j, worst, i} - |X_{j, k, i}|) \quad (15)$$

با استفاده از رابطه (۱۵)، تمام متغیرهای تصمیم به‌روز شده و تأثیر مقادیر جدید سنجیده می‌شود. اگر مقادیر جدید باعث بهبود تابع هدف شوند، با مقادیر قبلی جایگزین، و در غیر این صورت از همان مقادیر قبلی استفاده شده و مراحل فوق تا تعداد معینی از نسل‌ها و یا رسیدن به مرحله‌ای که دیگر بهبود قابل توجهی در تابع هدف ایجاد نشود، ادامه می‌یابند. با توجه به مشابهت الگوریتم JAYA با الگوریتم دسته ذرات، برای ارتقا عملکرد آن از تابع وزن استفاده شده است. تابع

$$X'_{j, k, i} = X_{j, k, i} + \omega_1 r_1 (X_{j, best, i} - X_{j, k, i}) - \omega_2 r_2 (X_{j, worst, i} - X_{j, k, i}) \quad (16)$$

$$\text{If } X'_{j, k, i} < X_{j, \min} : X'_{j, k, i} = X_{j, \min} \quad \text{If } X'_{j, k, i} > X_{j, \max} : X'_{j, k, i} = X_{j, \max} \quad (17)$$



شکل ۱- فرآیند حل مسائل بهینه‌سازی (برآورد بهینه پارامترهای منحنی نگه‌داشت آب خاک) با روش I-JAYA

Fig. 1 Flowchart of the optimization problem's solving (for optimum estimation the SWRC's parameters) with the Improved Jaya algorithm

گستره جغرافیایی متنوع می‌باشند. در جدول (۱)، اطلاعات موردنیاز شامل کد نمونه خاک، چگالی بالک^۲، چگالی دانه‌ها^۳، تخلخل (n)، هدایت هیدرولیکی (K_{sat})، درصد رطوبت (θ_{sat}) در حالت اشباع، تعداد نقاط اندازه‌گیری شده (N)، بافت خاک^۴، موقعیت جغرافیایی برای هر نمونه درج شده و همچنین نقاط اندازه‌گیری شده پتانسیل ماتریک - درصد رطوبت خاک نیز ارائه گردیده است.

۳-۲- انتخاب بهترین مدل ریاضی

مدل‌های ریاضی متنوعی برای منحنی نگهداشت آب خاک ارائه شده‌اند که ۹ مدل از متداول‌ترین آن‌ها به‌همراه روابط و پارامترهای متناظر معرفی شده‌اند. برای انتخاب بهترین مدل ریاضی به‌این ترتیب عمل شد که با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک (Holland 1992) برای هر نمونه خاک، مسئله بهینه‌سازی برای همه مدل‌های ریاضی حل، و شاخص آماری R² و زمان محاسباتی برای انتخاب بهترین مدل ریاضی در نمودارهای شکل (۲) نمایش داده شده است. پارامترهای مورد استفاده الگوریتم ژنتیک در این حالت در ادامه تشریح شده است. تعداد جمعیت اولیه برابر با چهار برابر ماکزیمم (نقاط اندازه‌گیری شده هر نمونه یا تعداد پارامترهای مدل ریاضی مربوطه) و تعداد نسل‌ها دو برابر تعداد جمعیت اولیه. برای مقایسه عملکرد سایر الگوریتم‌ها مورد استفاده در این پژوهش، از همین مقادیر جمعیت اولیه و تعداد نسل‌ها عیناً استفاده شده است. لازم به ذکر است مفاهیم جمعیت اولیه و تعداد نسل در روش‌های تکاملی یکسان بوده و فقط با عناوین متفاوت ارائه می‌شوند. به‌طور مثال در الگوریتم JAYA و I-JAYA، تعداد متغیر کاندید و تعداد تلاش‌های الگوریتم، معادل جمعیت اولیه و تعداد نسل‌ها می‌باشند. کدهای کامپیوتری در نرم‌افزار Matlab توسعه داده شده و با استفاده از نتایج، نمودارها در نرم‌افزار Excel ترسیم شدند.

همان‌طور که در رابطه (۱۶) مشاهده می‌شود، علاوه بر افزودن توابع وزن (ω₁, ω₂) به رابطه اصلی روش JAYA، برای تسریع روند همگرایی الگوریتم، رابطه‌های (۱۷) و (۱۸) اضافه شده‌اند. این رابطه‌ها تضمین‌کننده جستجو الگوریتم در محدوده مجاز هر متغیر تصمیم می‌باشند.

در صورتی که متغیرهای به‌روز شده، مقادیر بیش‌تر (یا کم‌تر) از بیشینه (یا کمینه) در نظر گرفته شده برای هر متغیر طراحی اتخاذ کنند، مقادیر آن‌ها با مقادیر مرزی جایگزین می‌شود. با این فن مرزهای محدودیت‌های مسئله بیش‌تر در فرآیند جستجو دخیل شده و احتمال یافتن جواب‌های بهینه افزون می‌گردد. همچنین بعد از اجراهای مختلف الگوریتم I-JAYA مقادیر توابع وزن w₁= ۲/۵ و ω₂= ۰/۳ پیشنهاد می‌شوند. در شکل (۱) فرآیند حل مسئله با روش I-JAYA به‌صورت عمومی ارائه شده است. با توجه به شکل (۱)، ابتدا جمعیت اولیه برای متغیرهای تصمیم از میان فضای محدودیت‌ها تولید گردیده و سپس بهترین و بدترین جواب‌ها با توجه به معیار تابع هدف محاسبه و متغیرهای تصمیم متناظر مشخص گردیدند. برای هر متغیر تصمیم تولیدشده، با توجه به رابطه اصلاح متغیرها، یک مقدار به‌روز شده موقت محاسبه شده و بررسی گردید که این مقدار موقت در گستره قابل قبول بودند یا نه. در صورت عدول از گستره قابل قبول، مقادیر موقت با مقادیر مرزی جایگزین شد. اگر مقدار به‌روز شده متغیر تصمیم، مقادیر بهتری را برای تابع هدف به‌دست دهد، با مقدار قبلی جایگزین شده و در غیر این صورت از مقادیر قبلی استفاده می‌شود. مراحل فوق تا به‌دست آمدن بهترین جواب‌ها ادامه یافت. برای تشریح و جزئیات بیش‌تر به مقاله Askary et al. (2022) مراجعه نمایید.

۳- یافته‌ها و بحث

۳-۱- داده‌های مورد استفاده

برای سنجش کارایی مدل توسعه‌یافته این پژوهش، از داده‌های مشاهداتی معتبر پایگاه داده‌های هیدرولیکی خاک غیراشباع (UNSODA)^۱ استفاده شده است. داده‌ها مربوط به مقادیر اندازه‌گیری شده پتانسیل ماتریک به ازای درصد رطوبت برای ۱۲ نمونه خاک با ۶ نوع بافت مختلف و از ۹

²Bulk Density

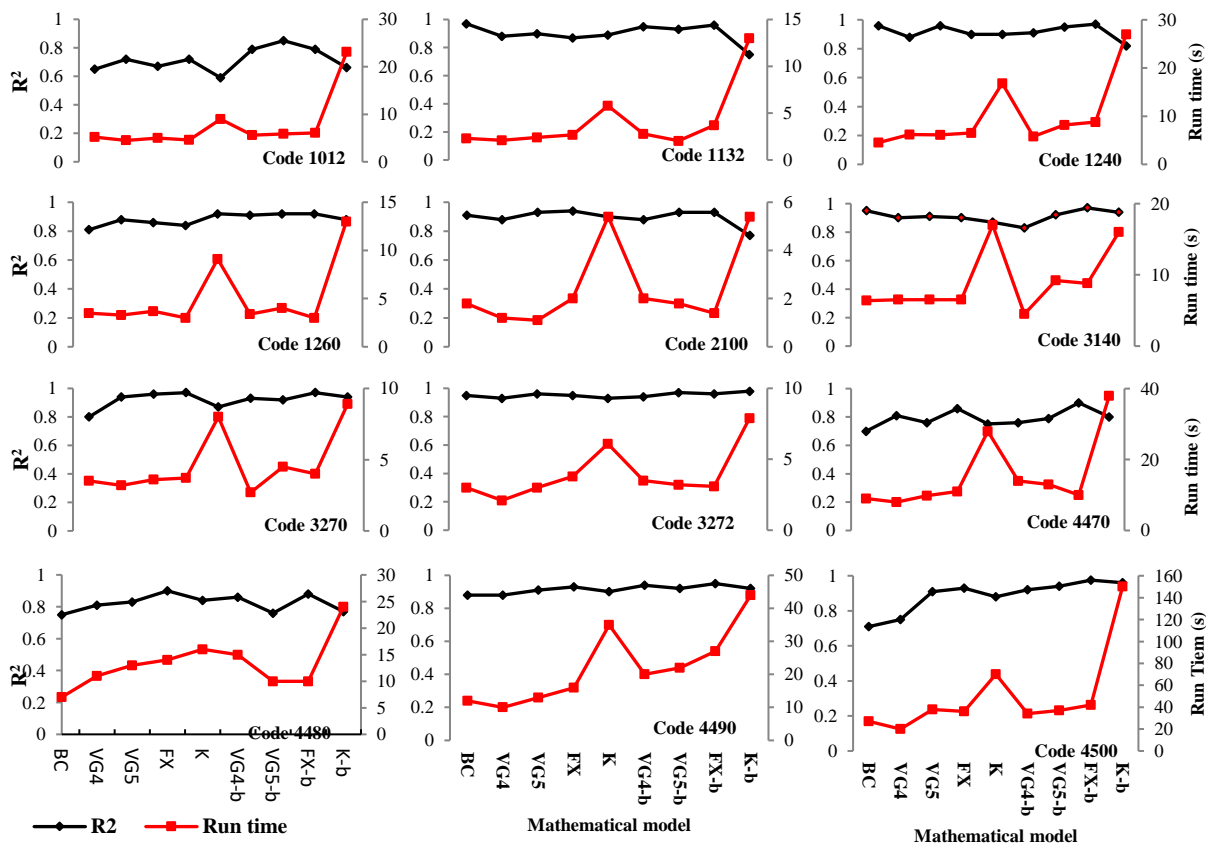
³Particle Density

⁴Texture

¹Unsaturated Soil Hydraulic Database

جدول ۱- مشخصات نمونه های خاک مورد استفاده در این پژوهش
Table 1 properties of soil samples used in this study

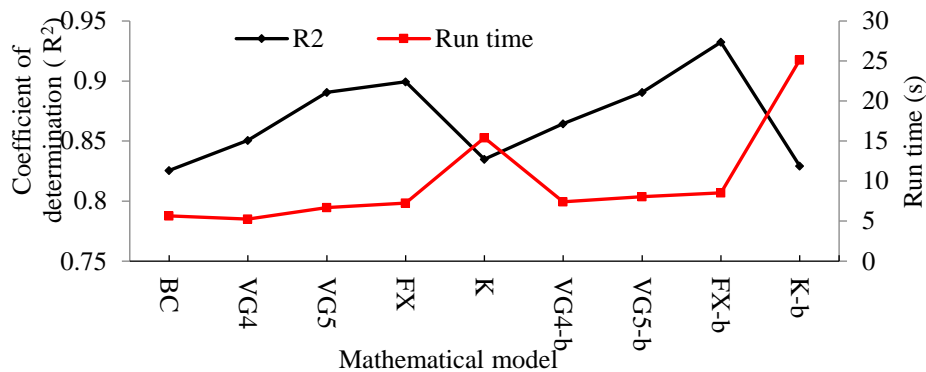
| Row | Code | Bulk Density | Particle Density | n | K _{sat} | θ _{sat} | N | Texture | Location |
|-----|------|--------------|------------------|-------|------------------|------------------|-----|-----------------|----------------------------|
| 1 | 1012 | 1.4 | 2.66 | 0.44 | 207 | - | 30 | Loamy Sand | Union Springs, AL, USA |
| 2 | 1132 | 1.77 | - | - | 0.415 | 0.352 | 13 | Sandy Clay Loam | Blackstone, VA, USA |
| 3 | 1240 | 1.7 | 2.82 | - | 389 | - | 30 | Sand | Hanford, Richland, WA, USA |
| 4 | 1260 | 1.54 | 2.57 | - | 77.8 | - | 12 | Loam | Hanford, Richland, WA, USA |
| 5 | 2100 | 1.7 | 2.7 | - | 370 | 0.374 | 7 | Sand | ICRISAT, Sadore, Niger |
| 6 | 3140 | 1.58 | - | 0.64 | - | 0.458 | 33 | Sand | Dickey Co., ND, USA |
| 7 | 3270 | 1.44 | - | - | - | 0.443 | 18 | Sandy Clay Loam | Bundoora, Vic. Australia |
| 8 | 3272 | 1.61 | - | - | - | 0.425 | 18 | Clay Loam | Bundoora, Vic. Australia |
| 9 | 4470 | 1.7 | 2.65 | 0.35 | 430 | 0.2 | 46 | Sandy Loam | Bouake, Ivory Coast |
| 10 | 4480 | 1.6 | 2.7 | 0.4 | 120 | 0.29 | 43 | Sand | Bambey, Senegal |
| 11 | 4490 | 1.5 | 2.7 | 0.44 | 276 | 0.22 | 60 | Sand | N. Diol, Senegal |
| 12 | 4500 | 1.65 | 2.7 | 0.389 | 150 | 0.3 | 156 | Sandy Loam | Bambey, Senegal |



شکل ۲- محاسبه R² و زمان محاسباتی مدل های ریاضی مختلف منحنی نگهداشت آب خاک حاصل از بهینه سازی با الگوریتم ژنتیک
Fig. 2 Calculation of R² and computational time of different mathematical models of SWRC resulting from optimization by GA

روش‌های چهار و پنج متغیره (Van Genuchten 1980) در حالت دووجهی (VG4-b, VG5-b) نیز دارای دقت‌های مطلوب با میانگین R^2 به ترتیب ۰/۸۹۰۵ و ۰/۸۶۴۴ هستند که نشان از قابلیت مطلوب این مدل‌ها علی‌رغم حجم محاسباتی کم با میانگین کمتر از $t=9s$ دارند. لازم به ذکر است که متوسط زمان محاسباتی این مدل‌ها حدوداً $t=8.52s$ بوده که از این حیث نیز، هزینه محاسباتی در حد و حدود سایر مدل‌های ریاضی می‌باشد. در ادامه برای بررسی عمیق‌تر عملکرد مدل‌های مختلف ریاضی منحنی نگهداشت، از نمودار (Taylor 2001) استفاده شد. این نمودار بر مبنای ارتباط هندسی شاخص‌های آماری شامل ضریب همبستگی، انحراف معیار استاندارد و ریشه میانگین مربعات اختلاف استوار است. با استفاده از تشابه این ارتباط هندسی و قانون کسینوس در مثلثات، می‌توان در یک نمودار و به‌طور هم‌زمان یک مدل را مورد بررسی قرار داده و به‌صورت هندسی شاخص‌های فوق را رؤیت نمود.

با توجه به نتایج شکل (۲)، روش (Fredlund-Xing (1994) در حالت دووجهی (FX-b) با ۱۰ متغیر تصمیم بیش‌ترین دقت و روش Brooks and Corney (1964) کمترین دقت را در مدل‌سازی ریاضی منحنی نگهداشت آب خاک از خود نشان دادند. برای بررسی دقیق‌تر و کمی این موضوع، مقادیر متوسط R^2 و زمان محاسباتی روش‌های ریاضی برای تمام نمونه‌های خاک در نمودار شکل (۳) ارائه شده است. با استفاده از نمودار شکل (۳)، همان‌طور که پیش‌بینی می‌شد، روش Fredlund and Xing (1994) در حالت دووجهی (FX-b)، با متوسط ضریب تعیین ۰/۹۳۲ و روش Brooks-Corney (1964) با متوسط ضریب تعیین ۰/۸۲۵ به ترتیب بهترین و بدترین مدل‌های ریاضی، با توجه به این ضریب می‌باشند. بیش‌ترین و کم‌ترین حجم محاسباتی به ترتیب مربوط به روش Kosugi (1994) در حالت دووجهی (K-b) با متوسط زمانی بیش‌تر از $t = 25 s$ و روش Brooks and Corney (1964) با متوسط حدوداً $t = 5 s$ می‌باشد.



شکل ۳- میانگین مقادیر R^2 و زمان محاسباتی مدل‌های ریاضی مختلف منحنی نگهداشت آب خاک حاصل از بهینه‌سازی با الگوریتم ژنتیک

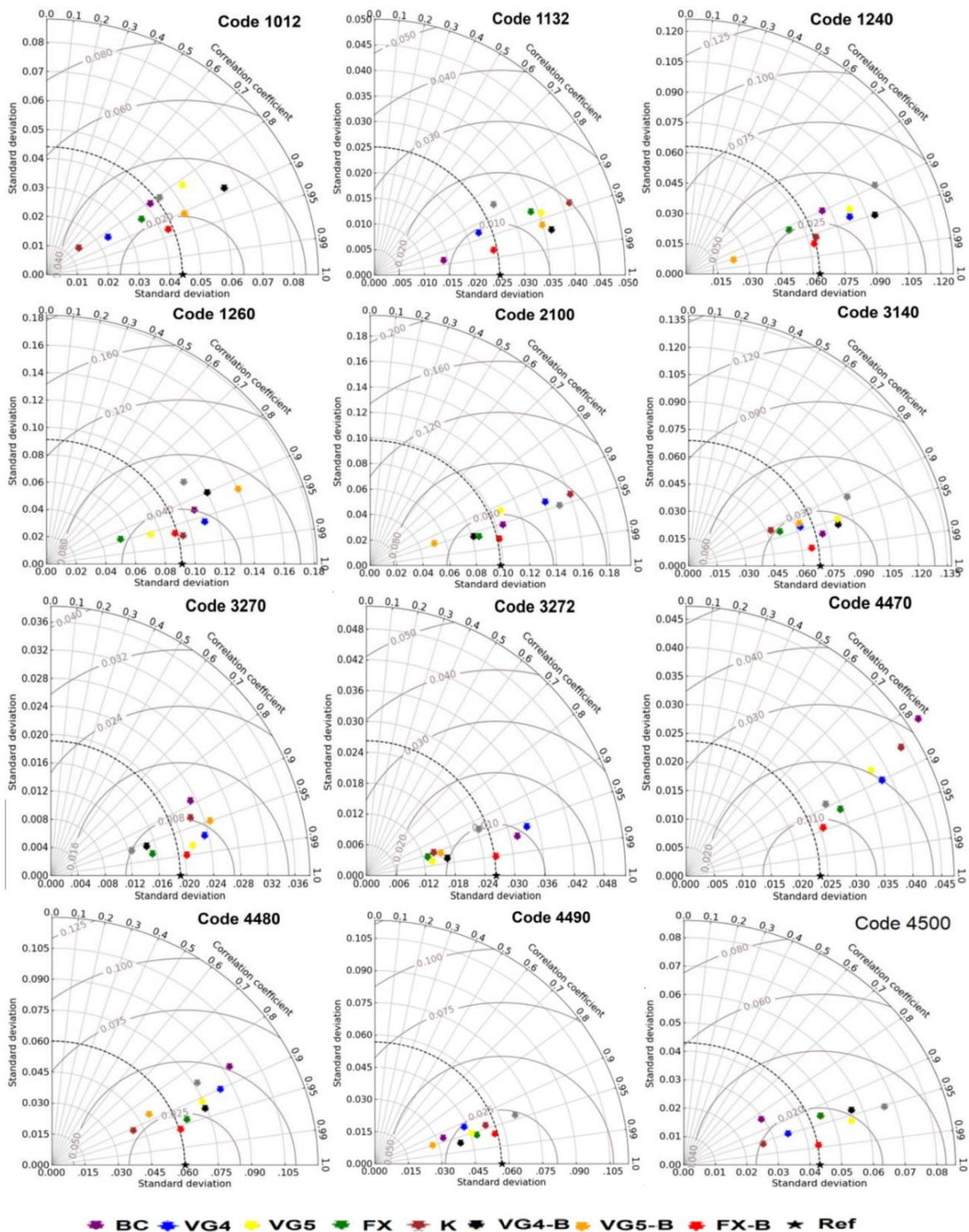
Fig. 3 Average values of R^2 and computational time of different mathematical models of SWRC resulting from optimization by the GA

در شکل (۴) و (۵) نمودارهای تیلور برای نمونه‌های خاک و مدل‌های ریاضی این پژوهش ارائه شده‌اند. برای ترسیم این نمودار از زبان برنامه‌نویسی Python در محیط Jupyter بهره گرفته شد. همان‌طور که در نمودارهای شکل (۴) نشان داده شده است، ۱۲ نمونه مختلف خاک با کدهای مشخص بررسی شدند. برای هر نمونه، از ۹ مدل ریاضی شامل Brooks and Corney (1964) and Van Genuchten (1980)، حالت‌های چهار و پنج متغیره (VG4, VG5)، Fredlund and Xing (1994) and Kosugi (1994) و همچنین حالت‌های دووجهی آن‌ها استفاده شده است. حرف b در شکل (۴) نماد حالت دووجهی هر مدل بوده (VG4-b, FX-b)

و محورهای افقی و قائم معرف مقادیر انحراف معیار استاندارد و محور محیطی، معرف مقادیر ضریب همبستگی می‌باشد. همچنین نیم‌دایره‌هایی به مرکزیت نقطه مرجع (داده‌های میدانی) مشاهده می‌شوند که بیانگر ریشه میانگین مربعات اختلاف است. نمودار (Taylor 2001) ارائه دهنده نگرش هندسی و بصری از شاخص‌های آماری به‌صورت توأمان می‌باشد. بدین‌صورت که هرچه نقطه متناظر مدل به فاصله کم‌تری از نقطه مرجع باشد، عملکرد مطلوب‌تری از خود نشان می‌دهد. با دقت در نمودار، در اکثر موارد، مدل Fredlund and Xing (1994) دووجهی (FX-b) (نقاط قرمز رنگ) فاصله کمتری با نقاط مرجع دارند. از

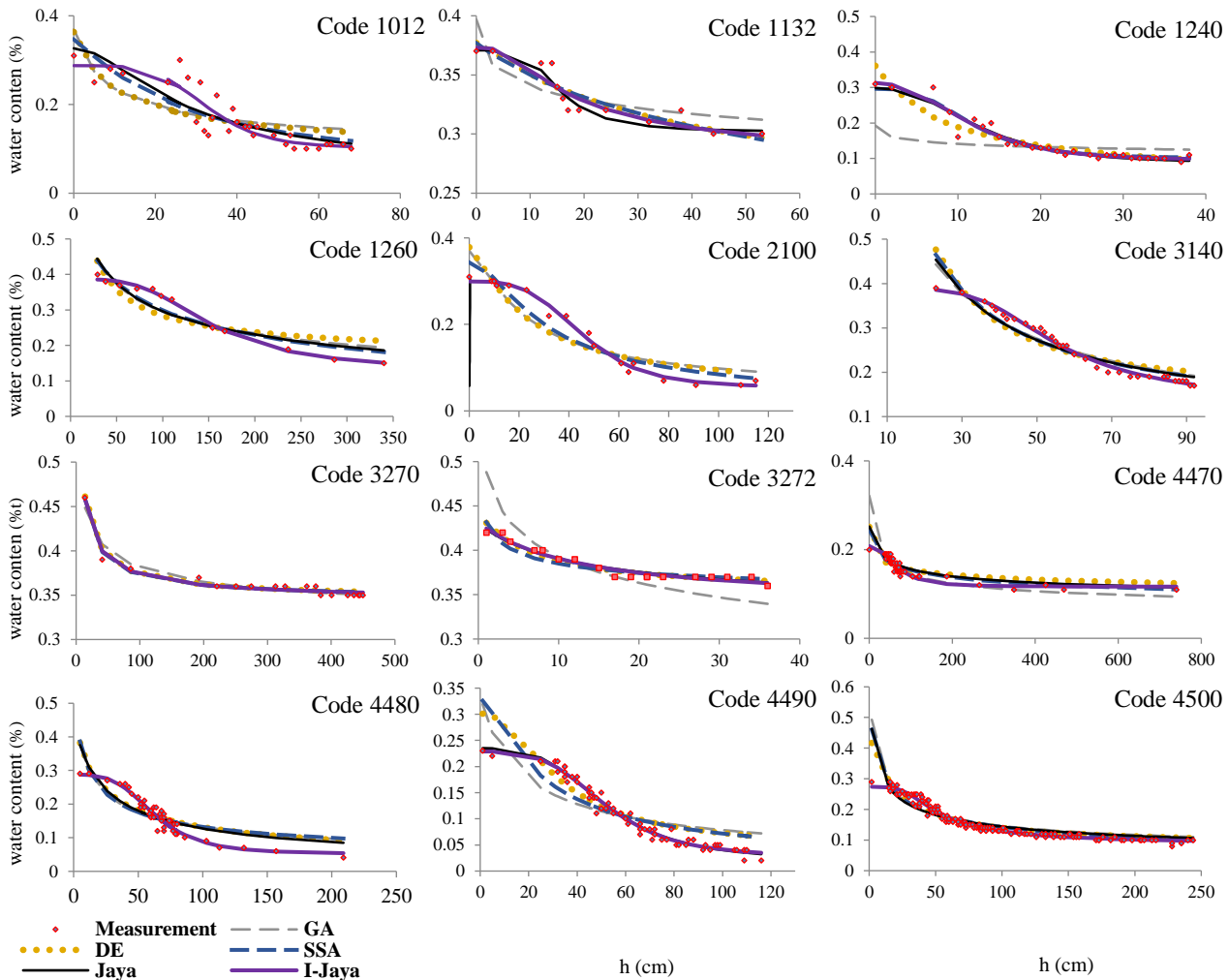
این نظر به‌عنوان مناسب‌ترین مدل ریاضی تأیید مجدد می‌شود. حالت تک‌وجهی این مدل (نقاط سبز) به‌همراه مدل Van Genuchten (1980) چهار متغیره (VG4) (نقاط

آبی) نیز نسبتاً نتایج مطلوبی ارائه داده و در اکثر موارد، فاصله هندسی کم‌تری نسبت به سایر مدل‌ها دارند.



شکل ۴- نمودار تیلور برای مقایسه عملکرد مدل‌های ریاضی منحنی نگهداشت آب خاک با استفاده از داده‌های مشاهداتی ۱۲ نمونه خاک با بافت‌های متنوع

Fig. 4 Taylor diagram to compare the performance of mathematical models of SWRC using observational data of 12 soil samples with diverse texture



شکل ۵- نقاط اندازه‌گیری شده و منحنی‌های نگهداشت آب خاک برای نمونه‌های مختلف خاک حاصل از بهینه‌سازی مدل‌های ریاضی
 Fig. 5 Measured data and SWRC for different soil samples resulting from the optimization of mathematical models

دقت مدل‌سازی می‌باشد، با هم مقایسه شده‌اند. هر چه R^2 به سمت عدد ۱ نزدیک شود، مدل دقیق‌تر است. مقادیر متوسط آن برای روش‌های GA، SSA، DE، JAYA و I-JAYA به ترتیب عبارت است از ۰/۹۱۳، ۰/۹۱۹، ۰/۹۳۱، ۰/۹۲۱ و ۰/۹۵۸. عملکرد روش SSA از روش JAYA بهتر بوده که با اعمال تغییرات در روش JAYA و ارتقاء آن، منجر به عملکرد بهتر این روش نسبت به الگوریتم JAYA و سایر روش‌ها شد. این تغییرات باعث تفاوت چندانی در حجم محاسباتی نشده و حتی آن را کاهش نیز داده است. همچنین متوسط RMSE برای روش‌های فوق به ترتیب برابر ۰/۲۰۶، ۰/۱۰۳، ۰/۰۵۳، ۰/۰۳۶ و ۰/۰۱۹ است که از این حیث نیز روش I-JAYA کم‌ترین میزان خطا را دارا می‌باشد.

۳-۳۳-۳- حل مسئله بهینه‌سازی

پس از تعیین بهترین مدل ریاضی در قسمت قبلی، مسئله بهینه‌سازی برآورد پارامترهای منحنی نگهداشت آب خاک برای این مدل ریاضی و توسط الگوریتم‌های GA، DE، SSA و JAYA به عنوان روش‌های شاهد و همچنین روش توسعه‌یافته در این پژوهش یعنی I-JAYA حل و نتایج در شکل (۵) ارائه شد. با توجه به نمودارهای شکل (۵)، برای نمونه‌های مختلف خاک، روش‌های SSA و I-JAYA نتایج منطبق‌تری با نقاط اندازه‌گیری شده منحنی نگهداشت آب خاک ارائه دادند. برای واکاوی این موضوع، نتایج کمی الگوریتم‌های مختلف بهینه‌سازی در جدول (۲) ارائه شده است. در جدول (۲) عملکرد روش‌های بهینه‌سازی مختلف با استفاده از مقادیر R^2 و RMSE که معیارهایی برای سنجش

جدول ۲- شاخص‌های آماری R^2 و RMSE به‌ازای روش‌های مختلف بهینه‌سازی برای نمونه‌های خاکTable 2 Statistical indexes of R^2 and RMSE for the different optimization methods and soil samples

| Soil's Code | I-Jaya | | Jaya | | SSA | | DE | | GA | |
|-------------|--------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|---------|
| | R^2 | RMSE | R^2 | RMSE | R^2 | RMSE | R^2 | RMSE | R^2 | RMSE |
| 1012 | 0.926 | 00.0548 | 0.904 | 0.01318 | 0.913 | 0.00866 | 0.905 | 0.01101 | 0.902 | 0.04720 |
| 1132 | 0.953 | 0.00125 | 0.922 | 0.00197 | 0.934 | 0.00336 | 0.923 | 0.00418 | 0.935 | 0.01390 |
| 1240 | 0.967 | 0.00985 | 0.966 | 0.02207 | 0.948 | 0.03264 | 0.952 | 0.06960 | 0.903 | 0.09076 |
| 1260 | 0.982 | 0.00013 | 0.943 | 0.00014 | 0.946 | 0.00017 | 0.936 | 0.00038 | 0.853 | 0.00119 |
| 2100 | 0.970 | 0.05780 | 0.962 | 0.03964 | 0.947 | 0.33300 | 0.948 | 0.32129 | 0.917 | 0.66345 |
| 3140 | 0.960 | 0.08797 | 0.921 | 0.24468 | 0.935 | 0.29766 | 0.922 | 0.47110 | 0.952 | 0.38101 |
| 3270 | 0.948 | 0.00458 | 0.912 | 0.01161 | 0.928 | 0.01399 | 0.915 | 0.03387 | 0.943 | 0.03376 |
| 3272 | 0.965 | 0.00258 | 0.934 | 0.00326 | 0.945 | 0.00427 | 0.935 | 0.02104 | 0.948 | 0.01622 |
| 4470 | 0.942 | 0.01366 | 0.898 | 0.03304 | 0.914 | 0.02290 | 0.899 | 0.11334 | 0.883 | 0.06715 |
| 4480 | 0.980 | 0.00099 | 0.891 | 0.00114 | 0.930 | 0.00057 | 0.898 | 0.00217 | 0.869 | 0.00095 |
| 4490 | 0.970 | 0.00266 | 0.886 | 0.00192 | 0.922 | 0.00743 | 0.892 | 0.00421 | 0.930 | 0.01324 |
| 4500 | 0.935 | 0.04538 | 0.911 | 0.07560 | 0.915 | 0.05791 | 0.908 | 0.39258 | 0.926 | 0.46283 |
| Average | 0.958 | 0.019 | 0.921 | 0.036 | 0.931 | 0.053 | 0.919 | 0.103 | 0.913 | 0.206 |

در جدول (۳)، بهترین مقادیر محاسبه شده برای پارامترهای مدل ریاضی (Fredlund and Xing 1994) در حالت دووجهی (FX-b) منحنی نگهداشت برای نمونه‌های مختلف بافت خاک محاسبه و ارائه شده‌اند. کارایی الگوریتم I-JAYA با جدیدترین روش‌های بهینه‌سازی در این حوزه شامل الگوریتم GA (Guo et al. 2009)، DE (Maggie et al. 2017)، SSA (Zhang et al. 2018) و JAYA (Wang et al. 2018) به‌عنوان شاهد مقایسه شد. نتایج نشان از عملکرد بهتر روش I-JAYA نسبت به روش JAYA و همچنین نسبت به پژوهش‌های فوق‌الذکر دارد. Zhang et al. (2018) به‌منظور ارزیابی پارامترهای منحنی نگهداشت آب خاک از مدل (Van Genuchten 1980) و الگوریتم SSA بر روی ۹ نمونه خاک با ۸ بافت مختلف استفاده نمودند. نتایج حاکی از عملکرد بهتر الگوریتم SSA نسبت به DE و PSO و برنامه کامپیوتری RETC داشته که با نتیجه پژوهش حاضر مطابقت دارد.

جدول ۳- مقادیر بهینه پارامترهای مدل ریاضی FX-b حاصل از روش I-JAYA برای نمونه‌های مختلف خاک

Table 3 Optimal values of FX-b mathematical model parameters, obtained from the I-Jaya algorithm for the soil samples

| Soil's Code | θ_r (%) | θ_s (%) | α_1 | n_1 | m_1 | w_1 | α_2 | n_2 | m_2 | w_2 |
|-------------|----------------|----------------|------------|-------|-------|-------|------------|-------|-------|-------|
| 1012 | 0.014 | 0.230 | 0.038 | 4.26 | 0.93 | 1.17 | 5.88 | 8.32 | 11.0 | 0.18 |
| 1132 | 0.275 | 0.336 | 0.086 | 2.83 | 1.66 | 0.61 | 0.08 | 2.09 | 1.00 | 0.71 |
| 1240 | 0.081 | 0.231 | 0.088 | 2.95 | 1.69 | 1.19 | 0.05 | 2.56 | 3.74 | 0.05 |
| 1260 | 0.140 | 0.206 | 7.160 | 6.99 | 10.30 | 0.01 | 0.01 | 3.03 | 2.46 | 3.35 |
| 2100 | 0.034 | 0.216 | 0.033 | 2.78 | 2.06 | 0.36 | 0.02 | 3.72 | 1.75 | 1.26 |
| 3140 | 0.118 | 0.322 | 3.398 | 6.81 | 10.17 | 0.01 | 0.02 | 3.60 | 1.65 | 1.42 |
| 3270 | 0.322 | 0.469 | 0.730 | 1.17 | 1.50 | 2.54 | 0.59 | 1.38 | 1.14 | 1.07 |
| 3272 | 0.309 | 0.452 | 0.124 | 2.11 | 1.46 | 0.65 | 0.38 | 0.51 | 0.67 | 0.68 |
| 4470 | 0.090 | 0.217 | 0.016 | 4.55 | 1.39 | 0.50 | 0.02 | 0.97 | 0.91 | 0.33 |
| 4480 | 0.031 | 0.229 | 0.015 | 2.86 | 2.04 | 1.48 | 6.43 | 8.34 | 11.8 | 0.07 |
| 4490 | 0.015 | 0.199 | 6.023 | 8.01 | 10.93 | 0.06 | 0.02 | 3.36 | 2.33 | 1.25 |
| 4500 | 0.068 | 0.245 | 1.075 | 2.14 | 2.73 | 0.27 | 0.02 | 2.71 | 1.26 | 1.51 |

۴- نتیجه‌گیری

اندازه‌گیری مستقیم منحنی نگهداشت آب خاک و پارامترهای آن‌ها پرزحمت و هزینه‌بردار می‌باشد. ازین‌رو مدل‌های ریاضی و فن‌های بهینه‌سازی مورد توجه قرار گرفته‌اند. برای حصول هرچه بیش‌تر دقت در برآورد این پارامترها، در این پژوهش از داده‌های مشاهداتی ۱۲ نمونه خاک با ۶ بافت مختلف از ۹ نقطه مختلف دنیا برگرفته از پایگاه UNSODA استفاده شده و نتایج زیر حاصل شد:

۱- برای انتخاب مناسب‌ترین مدل ریاضی منحنی نگهداشت آب خاک، با استفاده از الگوریتم ژنتیک و همچنین نمودار Taylor، مدل‌های Fredlund and Xing و Brooks and Corey به ترتیب با متوسط ضریب تعیین ۰/۹۳۲ و ۰/۸۲۵ بیش‌ترین و کم‌ترین دقت را نشان دادند.

۲- برای بهینه‌سازی پارامترهای منحنی نگهداشت آب خاک، الگوریتم جدید I-JAYA برای مدل ریاضی Fredlund and Xing (FX-b) توسعه داده شد. در ۱۲ نمونه ارزیابی شده، الگوریتم مذکور نسبت به الگوریتم‌های GA، DE، SSA و JAYA، نتایج منطبق‌تری با نقاط اندازه‌گیری شده ارائه داد.

۳- الگوریتم I-JAYA مقادیر تابع هدف را نسبت به الگوریتم‌های شاهد به مقدار بهتری کمینه می‌نماید.

۴- الگوریتم I-JAYA با کسب مقادیر خطا و ضریب تعیین، در مقایسه با چهار روش دیگر مورد استفاده، عملکرد بهتری داشته و از لحاظ کارایی در رتبه نخست، سپس الگوریتم‌های JAYA، SSA، DE و GA به ترتیب در رتبه‌های بعدی قرار گرفتند.

از نتایج این پژوهش می‌توان به صورت عملی برای برآورد بهینه پارامترهای منحنی نگهداشت آب خاک استفاده نمود. همچنین در ادامه پیشنهاد می‌شود با بهره از داده‌ها و نتایج این پژوهش و با استفاده از روش ANN و یا ترکیب آن‌ها با روش‌های بهینه‌سازی از جمله روش I-JAYA، اقدام به داده‌کاوی برای تخمین ضرایب هیدرولیکی خاک در حالت غیراشباع اقدام شود.

دسترسی به داده‌ها

داده‌های استفاده شده در این پژوهش برگرفته از پایگاه داده-های هیدرولیکی خاک غیراشباع (UNSODA) بوده که قابلیت دسترسی عمومی دارد. داده‌ها و نتایج تولید شده در این پژوهش در متن مقاله ارائه شده است.

تضاد منافع نویسندگان

نویسندگان این مقاله اعلام می‌دارند که، هیچ‌گونه تضاد منافی در رابطه با نویسندگی و یا انتشار این مقاله ندارند.

References

- Askary, R., Najarchi, M. and Mazaheri, H. (2022). Estimating SWRC parameters and unsaturated hydraulic permeability by improved Jaya and hybrid improved Jaya optimization algorithms. *Earth Sci. Inform.*, 15(4), 2155 – 2169. DOI: [10.1007/s12145-022-00862-z](https://doi.org/10.1007/s12145-022-00862-z).
- Assouline, S., Tessier, D. and Bruand, A. (1998). A conceptual model of the soil water retention curve. *Water Resour. Res.*, 34(2), 223-231. DOI: [1029/10.97WR03039](https://doi.org/10.2929/10.97WR03039)
- Bezerra-Coelho, C. R., Zhuang, L., Barbosa, M. C., Soto, M. A. and Van Genuchten, M. T. (2018). Further tests of the HYPROP evaporation method for estimating the unsaturated soil hydraulic properties. *J. Hydrol. Hydromech.*, 66(2), 161-169. DOI: [1515/10/johh-2017-0046](https://doi.org/10.1515/10/johh-2017-0046).
- Bittelli, M. and Flury, M. (2009). Errors in water retention curves determined with pressure plates. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 73(5), 1453–1460. DOI: [10.2136/sssaj2008.0082](https://doi.org/10.2136/sssaj2008.0082)
- Brooks, R. H. and Corey, A. T. (1964). Hydraulic properties of porous media. *Hydrol. Pap. Colo. State Univ.*, 24, 37.
- Chen, G., Jiao, L. and Li, X. (2016). Sensitivity Analysis and Identification of Parameters to the Van Genuchten Equation. *J. Chem.* 2016(5), 1-8. DOI: [10.1155/2016/9879537](https://doi.org/10.1155/2016/9879537)
- Fetter, C. W. and Kreamer, D. (2021). *Applied hydrogeology*. Waveland Press. 625 pp.
- Fields, J. S., Owen, J. S., Zhang, L. and Fonteno, W. C. (2016). Use of the evaporative method for determination of soilless substrate moisture characteristic curves. *Sci. Hortic.*, 211, 102-109. DOI: [1016/10/j.scienta.08/2016.009](https://doi.org/10.1016/j.scienta.08/2016.009)
- Fredlund, D. G. and Xing, A. (1994). Equations for the soil-water characteristic curve. *Can.*

- Geotech. J., 31(4), 521-532. DOI: [10.1139/t94-061](https://doi.org/10.1139/t94-061)
- Fredlund, D. G., Rahardjo, H. and Fredlund, M. D. (2012). *Unsaturated Soil Mechanics in Engineering Practice*, John Wiley & Sons. 944 pp. DOI: [10.1002/9781118280492](https://doi.org/10.1002/9781118280492)
- Haghverdi, A, Najarchi, M., Öztürk, H. S. and Durner, W. (2020). Studying unimodal, bimodal, PDI and bimodal-PDI variants of multiple soil water retention models: i. direct model fit using the extended evaporation and dewpoint methods. *Water*, 12(3), 900. DOI: [10.3390/w12030900](https://doi.org/10.3390/w12030900)
- Holland, J. H. (1992). *Adaptation in natural and artificial systems*. Cambridge, MA, USA: MIT Press. 232 pp.
- Kirkham, M. B. (2014). *Principles of Soil and Plant Water Relations*. Academic Pres. 598 pp
- Kosugi, K. I. (1996). Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties. *Water Resour. Res.*, 32(9), 2697-2703. DOI: [10.1029/96WR01776](https://doi.org/10.1029/96WR01776)
- Liu, W., Luo, X., Huang, F. and Fu, M. (2019). Prediction of soil water retention curve using Bayesian updating from limited measurement data. *Appl. Math. Model*, 76, 380–395. DOI: [10.1016/j.apm.2019.06.028](https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.06.028)
- Lu, N. and Likos, W. J. (2004). *Unsaturated Soil mechanics*. John Wiley & Sons. 584pp.
- Lu, S., Ren, T., Gong, Y. and Horton, R. (2008). Evaluation of three models that describe soil water retention curves from saturation to oven dryness. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 72(6), 1542-1546. DOI: [10.2136/sssaj2007.0307N](https://doi.org/10.2136/sssaj2007.0307N)
- Maggi, S. (2017). Estimating water retention characteristic parameters using differential evolution. *Comput. Geotech.*, 86, 163-172. DOI: [10.1016/j.compgeo.2016.12.025](https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2016.12.025)
- Mohammadi, M. H. and Vanclooster, M. (2011). Predicting the soil moisture characteristic curve from particle size distribution with a simple conceptual model. *Vadose Zone J.*, 10(2), 594-602. DOI: [10.2136/vzj2010.0080](https://doi.org/10.2136/vzj2010.0080)
- Montgomery, D. C., Runger, G. C. and Hubele, N. F. (2011), *Engineering statistics*. John Wiley & Sons. 544 pp.
- Navidi, N., Seyedmohammadi, J. and Seyed Jalali, S. A. (2021). Predicting soil water content using support vector machines improved by meta-heuristic algorithms and remotely sensed data. *Geomech. Geoeng.*, 1-15. DOI: [10.1080/17486025.2020.1864032](https://doi.org/10.1080/17486025.2020.1864032)
- Rao, R. V. (2016) Jaya: A simple and new optimization algorithm for solving constrained and unconstrained optimization problems. *Int. J. Ind. Eng. Comput.*, 7 (1), 19–34. DOI: [10.5267/j.ijiec.2015.8.004](https://doi.org/10.5267/j.ijiec.2015.8.004)
- Schaap, M. G., Leij, F. J. and Van Genuchten, M. T. (2001). ROSETTA: a computer program for estimating soil hydraulic parameters with hierarchical pedotransfer functions. *J. Hydrol.*, 251, 163–176. DOI: [10.1016/S0022-1694\(01\)00466-8](https://doi.org/10.1016/S0022-1694(01)00466-8)
- Solone, R., Bittelli, M., Tomei, F. and Morari, F. (2012). Errors in water retention curves determined with pressure plates: effects on the soil water balance. *J. Hydrol.*, 470, 65–75. DOI: [10.1016/j.jhydrol.2012.08.017](https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2012.08.017)
- Taylor, K. E. (2001), Summarizing multiple aspects of model performance in a single diagram. *Geophys. Res.: Atmos.*, 106(D7), 7183-7192. DOI: [10.1029/2000JD900719](https://doi.org/10.1029/2000JD900719)
- Tietje, O. and Tapkenhinrichs, M. (1993). Evaluation of pedo-transfer functions. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 57(4), 1088–1095. DOI: [10.2136/sssaj1993.03615995005700040035x](https://doi.org/10.2136/sssaj1993.03615995005700040035x)
- Too, V. K., Omuto, C. T., Biamah, E. and Obiero, J. P. (2014), Review of Soil Water Retention Characteristic (SWRC) Models between Saturation and Oven Dryness. *Open J. Mod. Hydrol.*, 4(04), 173-182. DOI: [10.4236/ojmh.2014.44017](https://doi.org/10.4236/ojmh.2014.44017)
- UNSODA. (2015). *Unsaturated Soil Hydraulic Database*. Available online at: <https://data.nal.usda.gov/dataset/>, Accessed 15, December 2021
- Van Genuchten M. T. (1980). A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 44(5), 892–898 DOI: [10.2136/sssaj1980.03615995004400050002x](https://doi.org/10.2136/sssaj1980.03615995004400050002x)
- Wang, L., Huang, C. and Huang, L. (2018), Parameter estimation of the soil water retention curve model with Jaya algorithm. *Comput. Electron. Agric.*, 151, 349-353. DOI: [10.1016/j.compag.2018.06.024](https://doi.org/10.1016/j.compag.2018.06.024)
- Wosten, J. H. M. and Van Genuchten, M. T. (1988). Using texture and other soil properties to predict the unsaturated soil hydraulic

- functions. *Soil Sci, Soc. Am. J.*, 52(6), 1762–1770. DOI: [10.2136/sssaj1988.03615995005200060045x](https://doi.org/10.2136/sssaj1988.03615995005200060045x)
- Xing, X., Wang, H. and Ma, X. (2018). Brooks-Corey modeling by one-dimensional vertical infiltration method. *Water*, 10(5), 593–603. DOI: [10.3390/w10050593](https://doi.org/10.3390/w10050593)
- Zhang, J., Wang, Z. and Luo, X. (2018), Parameter estimation for soil water retention curve using the salp swarm algorithm. *Water*, 10(6), 815. DOI: [10.3390/w10060815](https://doi.org/10.3390/w10060815)
- Zhang, X., Mavroulidou, M. and Gunn, M. J. (2017). A study of the water retention curve of limetreated London Clay. *Acta Geotech.*, 12(1), 23–45. DOI: [10.1007/s11440-015-0432-6](https://doi.org/10.1007/s11440-015-0432-6)
- Zhang, J., Wang, Z. and Luo, X. (2018), Parameter estimation for soil water retention

How to cite this paper:

Askary, R., Najarchi, M. and Mazaheri, H. (2023). Investigation of mathematical model and development of I-JAYA method to optimally estimate the parameters of soil water retention curve. *Environ. Water Eng.*, 9(1), 77–94. DOI: [10.22034/jewe.2022.321447.1705](https://doi.org/10.22034/jewe.2022.321447.1705)
